مكيـد علي

الاقتصاد القياسي

دروس ومسائل محلولة

الطبعة الثانية

ديوان المطبوعات الجامعية

رقم النشر: 4.01.4909
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 978.9961.0.1083.9
رقم الإيداع القانوني: 2257/ 2007

المحتويات

تقـــــديم

إن ممارسة النشاط في أي قطاع من القطاعات الاقتصادية في الوقت الحاظر (سواء في ميدان التسيير، الأنشطة المالية والنقدية، التسويق، المحاسبة، الرقابة، التخطيط أو في غيرها) تتطلب من الاختصاصي استعمال طرق وأساليب عمل حديثة، الاطلاع على منجزات الفكر الاقتصادي في الميادين المختلفة وفهم اللغة العلمية المعاصرة. كثير من الطرق الحديثة في عالم الاقتصاد تعتمد على النماذج، الأساليب والنظريات القياسية. بدون معرفة جيدة لمبادئ الاقتصاد القياسي لا يمكن استعمالها بكفاءة وفعالية. حتى أن مجرد الإطلاع ومحاولة استعمال المراجع الاقتصادية المختلفة في الوقت الحاظر يتطلب أيضا من القارئ مقدارا مناسبا من المعرفة الاقتصادية القياسية.

من أهم الخصوصيات التي تميز نشاط رجل الاقتصاد هي العمل في ظروف نقص المعلومات والمعطيات الأولية أو عدم كفايتها. تحليل مثل هذه المعطيات والمعلومات يتطلب استعمال طرق وأساليب خاصة التي تشكل إحدى الجوانب الهامة في الاقتصاد القياسي. المسألة الأساسية في الاقتصاد القياسي تتمثل في تكوين النماذج القياسية وتحديد إمكانيات استعمالها من أجل وصف، تحليل وتقدير الظواهر الاقتصادية المختلفة.

إن تطور الاقتصاد القياسي مرتبط ارتباطا وثيقا بدراسة الاقتصاد الجزئي والكلي. لا أحد من بين الاقتصاديين من ينكر في الوقت الحاظر أهمية المدخل القياسي في دراسة وتحليل الظواهر الاقتصادية سواء على المستوى الجزئي (سلوك الأفراد، ربات البيوت، أرباب العمل، ..، الخ)

أو على المستوى الكلي. هل كان بالإمكان دراسة، تحليل وقياس الظواهر الاقتصادية المختلفة، سواء ما تعلق منها بالنشاط الاقتصادي للفرد (الاستهلاك، الطلب، العرض، التبادل، الادخار،..، إلخ) أو بالنشاط الاقتصادي للمؤسسة (الإنتاج، التكاليف، الاستثمار وغيرهم) لولا المساهمة المتميزة للاقتصاد القياسي. لذلك فإن مقرر القياس الاقتصادي يعتمد كثيرا على مقاييس الاقتصاد الجزئي والكلي، الإحصاء والرياضيات التطبيقية. كما يشكل هو بدوره أداة أساسية لدراسة الاقتصاد الكلي والجزئي. إن الارتباط الوثيق بين الاقتصاد القياسي وهذه الفروع من العلوم الاقتصادية له أهميته العلمية أيضا، ذلك لأن استعمال الأدوات القياسية تمكن من اختبار الفرضيات التي تستند إليها النظرية الاقتصادية.

إن أبرز شهادة على الاعتراف العالمي بدور وأهمية الاقتصاد القياسي هي حصوله على خمس جوائز نوبل في الاقتصاد، تلقاها ثمانية من ألمع الاقتصاديين القياسيين العالميين وكانت آخرها في سنة 2003.

لكل هذه الاعتبارات وغيرها أصبح مقياس " مبادئ الاقتصاد القياسي "يشكل مادة أساسية في المناهج المعاصرة لتدريس العلوم الاقتصادية في كثير من الجامعات الرائدة في العالم. هذا الكتاب يمثل محاولة من المؤلف توفير مرجع إضافي باللغة الوطنية في الاقتصاد القياسي، وهو موجه إلى الطلبة والأساتذة في العلوم الاقتصادية والتجارية، المتخصصين في التقنيات الكمية الاقتصادية. هيكل ومحتوى هذا الكتاب يعتمد على التجربة الشخصية للمؤلف وعلى دراسة التجارب الأجنبية في هذا الميدان. المواضيع المدرجة فيه وأسلوب تقديمها تجعله متطابقا مع المستوى الأول من مقرر الاقتصاد القياسي.

دراسة هذه المادة تفترض من الطالب المتخصص اكتساب تجربة تكوين النماذج الاقتصادية، اتخاذ القرار الخاص باختيار النماذج وتخصيصها، اختيار طريقة تقدير معاملات هذه النماذج وتقييمها، تفسير النتائج وإمكانية استخدام النماذج المشكلة في إجراء الاستطلاعات والتوقعات المختلفة. يجب أن يتعلم الطالب أيضا ويكون قادرا على إعطاء تقييم للآثار السلبية لبعض الظواهر الإحصائية التي تصادف الباحث القياسي عند إجراء العمليات التقديرية المختلفة ومعرفة كيفية معالجتها (مثل الارتباط الذاتي لحدود الخطأ، الازدواج الخطي وغيرهما). لا يستطيع الطالب الوصول إلى تحقيق هذه الأهداف إلا باستخدام الرصيد النظري المحصل عليه في الميدان. تتمثل المهمة هنا في ضرورة تعود الطالب وتمرنه على حل المسائل والتمارين. لذلك فإننا ارتأينا ضرورة تضمين كل فصل من فصول هذا الكتاب عددا كبيرا من المسائل المحلولة والتمارين، سعيا منا إلى تمكين الطالب من دراسة وفهم هذه المادة بفعالية وبأقل عناء ممكن.

لقد توخينا في عرض مواضيع هذا الكتاب التبسيط دون الإخلال بالمحتوى، كما توسعنا في جوانب كثيرة منه دون الوصول إلى حد التعقيد. لقد حاولنا قدر الإمكان الابتعاد عن الجوانب النظرية المعقدة التي عادة ما تثير مخاوف الطلبة.

أرجو أن يكون هذا الكتاب عند حسن ظن زملائي الأساتذة وأبنائي الطلبة، والله ولي التوفيق.

د. مكيد علي

مقدمـــة

1- موضوع الاقتصاد القياسي:

إن مصطلح "اقتصاد قياسي" (économétrie) يحتوي على كلمة "اقتصاد" (économie) وهي جذر هذا المصطلح وذلك لأن ميدان استعماله الأساسي هو معالجة الظواهر الاقتصادية. الجزء الآخر لهذا المصطلح وهو كلمة "القياسي"وتعني الحساب، القياس، أي التقدير الكمي للأشياء.

إذن موضوع الاقتصاد القياسي هو التعبير الكمي عن ظاهرة اقتصادية ما والعوامل التي تتحكم فيها وتقديمها في شكل علاقات رياضية (معادلات، دوال،...،الخ)، تكون متغيراتها عبارة عن مقادير اقتصادية. بمعنى آخر تحويل المشكلة الاقتصادية من شكلها النظري العام إلى شكل كمي تحكمه علاقات كمية رياضية يمكن أن تعالج باستعمال الطرق والتقنيات الرياضية والإحصائية. فموضوع الاقتصاد القياسي إذن هو النمذجة الاقتصادية أي بناء النماذج الرياضية الاقتصادية.

ما هو النموذج: هو تقديم أو عرض مبسط وعام للوضعية المعقدة التي عادة ما تكون عليها الظاهرة في الطبيعة. وهو يعكس العناصر الأساسية التي تتحكم في هذه الظاهرة المدروسة وعلاقات التأثير المتبادل بينها. فالنموذج هو الأداة التي يستعملها الباحث من أجل محاولة فهم وتفسير الظواهر أولا، ثم التمكن من تقديرها والحصول على توقعات بتطورها في المستقبل. تكمن صعوبة النمذجة في ضرورة إبراز العناصر الأساسية للظاهرة من وجهة نظر المشكلة المراد تفسيرها من طرف الباحث. لذلك فالظاهرة الواحدة يمكن أن

تكون لها عدة نماذج مختلفة على حسب الهدف الذي يريد الباحث أن يصل إليه وعلى حسب المشكلة التي يريد معالجتها.

يستند النموذج في تكوينه على نظرية، ما والنظرية تستند إلى فرضيات وملاحظات لتفسير الظاهرة المدروسة. فالنظرية الاقتصادية تعطينا الأساس النظري العام لطبيعة الظاهرة ونمط عملها: ما هي العناصر الأساسية التي تتحكم فيها وطبيعة العلاقات الموجودة بينها، أي شكل التأثير المتبادل بينها. بالاعتماد على هذا الأساس النظري يقوم باحث الاقتصاد القياسي بتشكيل النموذج المفترض ثم تقديره أي حساب معاملاته وفي الأخير تقييمه ومنها يعتمد أو يرفض.

إن النماذج القياسية تمكن الأعوان الاقتصاديين والمسيرين من إجراء التقديرات وحساب التوقعات الكمية لمختلف المتغيرات الاقتصادية، مما يساعدهم على اتخاذ القرارات ووضع السياسات الاقتصادية المختلفة بصفة فعالة. فالاقتصاد القياسي يمكنه- على سبيل المثال- توفير نموذج للعلاقة الكمية التي تربط الدخل المتاح بالإنفاق على الاستهلاك ومنه نستطيع أن نعرف الأثر المحتمل للتغير في الدخل المتاح للفرد على التغير في الكمية المطلوبة من سلعة ما. كذلك فإن معرفة النموذج الكمي للعلاقة التي تربط بين ثمن سلعة ما والكمية المطلوبة منها يمكن من حساب تقديرات كمية عن مرونة طلب هذه السلعة، الشيء الذي يسمح بمعرفة الأثر النسبي للزيادة في الثمن على الكمية المطلوبة من تلك السلعة. يمكن أن نعرف أثر زيادة سعر سلعة ما على الكمية المطلوبة من السلعة البديلة أو المكملة لها. تسمح النماذج القياسية أيضا بقياس الأثر المحتمل لزيادة سعر الفائدة على

الاستثمار، الأثر المحتمل للسياسة النقدية والمالية على الاستهلاك والاستثمار وبالتالي على التضخم والبطالة.

بصفة عامة يستحيل، في الوقت الحاضر، على المسير أن يتخذ قرارا أو أن يرسم سياسة اقتصادية ما بدون إمكانية حصوله على تقديرات كمية لمختلف المتغيرات الاقتصادية. إن مصداقية وفعالية تلك القرارات والسياسات تعتمد على إمكانية معرفة آثارها المحتملة بصفة كمية ودقيقة.

2- منهاج الاقتصاد القياسي:

يتحدد منهاج الاقتصاد القياسي في المراحل التالية:

I- تكوين النموذج القياسي(نموذج الانحدار):

élaboration du modèle économétrique

يعني تشكيل النموذج القياسي تكوين الصيغة الرياضية (الكمية) للمشكلة المدروسة التي تربط بين الظاهرة المدروسة والعناصر التي تتحكم فيها، وتحديد طبيعة هذه الصيغة. ينطلق تكوين النموذج من الفرضيات التي توفرها النظرية الاقتصادية عن العوامل التي تتحكم في الظاهرة وعلاقات التأثير في ما بينها(المستقل والتابع). نعبر عن هذه العلاقات النظرية في شكل علاقة دالية عامة أو معادلة أو مجموعة معادلات: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. بحيث نرمز لكل عنصر أو عامل بمتغير.

من أجل تحديد نوع العلاقة الرياضية التي تجمع بين المتغير التابع والمتغير (المتغيرات) المستقل، أي من أجل تحديد أنسب الصيغ الرياضية التي تعبر عن هذه العلاقة بين المتغيرات تعبيرا دقيقا (خطية أو غير خطية، بسيطة أم متعددة) يجب أتباع الخطوات التالية:

I-1- إجراء تحليل تمهيدي: نتناول في هذا التحليل قبل كل شئ تعريف الظاهرة الناتجة أو المفسرة (y) ثم تحديد العوامل المؤثرة فيها (الظواهر المسببة أو المفسرة). يجب كذلك تحديد وحدات القياس التي نقيس بها تلك الظاهرة وكل من العوامل المؤثرة فيها على حدة.

I-2- التأكد من أن هناك علاقة جدلية واضحة بين الظاهرة المدروسة والعوامل المؤثرة فيها.

I-3- جمع المعلومات الأولية: يبدأ جمع المعطيات عن كل العوامل المرتبطة بالظاهرة المدروسة بواسطة إجراء القياسات اللازمة لكل منهم مع مراعاة أن تكون القيم متقابلة مع بعضها البعض من حيث المكان والزمان ثم نقوم بترتيب هذه المعلومات في جدول خاص.

I-4- التعرف على الشكل البياني الحقيقي للعلاقة محل الدراسة ويتم ذلك بواسطة الرسم البياني للمعطيات المتعلقة بالمتغير التابع وكل متغير مستقل على حدة. هذا الرسم يسمح إذن بتحديد الشكل البياني العام للعلاقة المدروسة بين مؤشرين (x),(y) وذلك من خلال تحديد الاتجاه العام لشكل انتشار النقط الخاصة بهذين المؤشرين. للقيام بعملية الرسم البياني للعلاقة بين هذين المؤشرين نرسم محورين احداثيين متعامدين ومتقاطعين في النقطة (0: المبدأ). نرمز للمحور الأفقي ب (ox) وتمثل عليه قيم الظاهرة المفسرة (x)، ونرمز للمحور الرأسي ب (oy) ويمثل عليه قيم الظاهرة المدروسة (y). بعد ذلك نضع القيم المقابلة على شكل أزواج مرتبة كما يلي $(x_n , y_n) , .. , (x_2 , y_2) ,$ (x_1 , y_1). نقوم بعدها برسم النقط الهندسية على المستوى (xoy)، والتي احداثياتها تساوي الأزواج المرتبة السابقة، فنحصل على جملة من

هذه النقاط موزعة في المستوى (xoy) وتأخذ شكلا معينا يسمى شكل الانتشار. نلاحظ أن توزع شكل الانتشار لا يعطينا بوضوح ودقة شكل خط أو منحنى معروف لدينا إلا أننا نلاحظ أن هناك اتجاها عاما لعلاقة (y , x) يمكن أن نمثله بخط مستقيم أو أي منحنى آخر ملائم وذلك بغض النظر عن بعض النقط (القيم) الشاذة التي تكون ناتجة عن أسباب أخرى (تأثير عوامل أخرى) غير المتغير المستقل (x) .

I-5 اختيار أنسب الصيغ الرياضية التي تتلاءم مع الشكل البياني الحقيقي للعلاقة محل الدراسة وتمثيله. بصفة عامة يمكن أن نميز الحالات التالية:

I-5-1- الاتجاه العام لشكل الانتشار يكون في شكل خط مستقيم أو قريبا منه. وبالتالي فالعلاقة بين (x,y) هي علاقة خطية (تكون ممثلة بخط مستقيم). يمكننا أن ننشأ خطا مستقيما يمر بين هذه النقاط ويتوسطها في آن واحد وذلك حسب الاتجاه العام لشكل الانتشار.

I-5-2- الاتجاه العام لشكل الانتشار هو في شكل غير خطي (شكل منحنى) أو قريبا منه وبالتالي فالعلاقة بين المؤشرات محل الدراسة هي علاقة غير خطية. إن العلاقة غير خطية بين عناصر الظاهرة المدروسة يمكن أن تكون في شكل معادلة من الدرجة الثانية (منحنى ذو نهاية واحدة عظمى أو صغرى). إذا كان المنحنى ذو نهايتين واحدة صغرى والأخرى عظمى فالعلاقة تكون في شكل معادلة من الدرجة الثالثة. إذا كان المنحنى يتقارب في اللانهاية من خط مستقيم ما فإن المنحنى يجب أن يكون على شكل قطع زائد، ... ،إلخ.

إن طريقة الرسم البياني تساعد كثيرا في الكشف عن نوعية العلاقة التي تربط بين المؤشرين (y) , (x) والصيغة الرياضية العامة التي تربطهما. لكنها تصبح قاصرة عندما نريد دراسة العلاقة بين أكثر من ظاهرتين كما سنرى في ما بعد في نموذج الانحدار المتعدد.

II- تقدير النموذج القياسي.

Estimation du modèle économétrique

إن تقدير النموذج القياسي، المشكل في المرحلة السابقة، يعني محاولة الوصول إلى تقديرات كمية لمعاملاته (أي معاملات المعادلة أو الدالة المقترحة). اختيار نوع المعادلة بدون تحديد الثوابت التي تتضمنها لا يفيدنا قطعا في دراسة هذه العلاقة. لذلك كان لابد من القيام بإجراء حسابات معينة لتحديد ثوابت المعادلة المختارة. إن أي ثابت في المعادلة (الدالة) المختارة يمكن أن يأخذ قيما متعددة وغير منتهية وبالتالي فإننا سنكون أمام لانهاية من المعادلات التي لها نفس النوع المختار سابقا. لذلك فإنه من الطبيعي جدا عند تحديد قيم تلك الثوابت أن نبحث عن قيمة لكل منها بحيث نحصل على معادلة معينة (ذات ثوابت محددة) وتمثل العلاقة المدروسة أفضل تمثيل. إن عملية التقدير هذه تعني البحث عن تلك القيم بواسطة طريقة المربعات الصغرى.

III- تقييم النموذج القيـــــــــاسي.

Evaluation du modèle économétrique

قبل استخدام النموذج القياسي المقدر يجب التأكد من جودة تقدير هذا النموذج. يتم هذا التقييم من خلال بعض الاختبارات

الرئيسية مثل: اختبار المعنوية الاقتصادية، المعنوية الإحصائية، جودة الأداء العام وغيرها.

IV- استخدام (تطبيقات) النموذج القياسي:
Utilisation du modèle économétrique

يعني هذا الجزء استعمال النماذج القياسية المحصل عليها في إجراء مختلف أنواع التقديرات والتوقعات لتطور الظواهر المدروسة في المستقبل. أي حساب قيم المتغير التابع في المستقبل بإعطاء قيم ما للمتغيرات المستقلة.

الفصل الأول

نموذج الانحدار البسيط.

تنقسم نماذج الانحدار بصفة عامة إلى قسمين:

أولا : نموذج الانحدار البسيط، وهو النموذج الذي يتكون من متغير مستقل واحد. يكون هذا النموذج خطيا إذا كانت العلاقة بين المؤشرين المدروسين معبر عنها في شكل معادلة خط مستقيم ويكون غير خطي إذا كانت العلاقة من نوع آخر (معادلة منحنى). ينقسم نموذج الانحدار البسيط غير الخطي إلى نوعين:

- نموذج بسيط غير خطي بالنسبة للمتغيرات المستقلة التي يتكون منها ولكنه خطي بالنسبة لمعاملات المتغيرات المستقلة التي يتكون منها هذا النموذج. مثال نماذج الانحدار البسيطة غير الخطية بالنظر للمتغيرات المستقلة التي تتكون منها وخطية بالنسبة لمعاملات هذه المتغيرات :

الدوال أو المعادلات من الدرجة الثانية وأكثر:

$$y = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \varepsilon$$

المعادلات الممثلة للقطع الزائد: $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ وغيرها.

- نموذج بسيط غير خطي سواء بالنسبة للمتغيرات المستقلة أو لمعاملات هذه المتغيرات. مثال نماذج الانحدار البسيطة غير الخطية بالنظر لمعاملات المتغيرات المستقلة التي يتكون منها النموذج:

الدالة الصماء: $y = a.x^b.\varepsilon$

الدالة من النوع: $y = a.b^x.\varepsilon$

الدالة الأسية وغيرها. $y = e^{a+b.x}.\varepsilon$

ثانيا- : نموذج الانحدار المتعدد، وهو الذي يتكون من أكثر من متغير مستقل. يكون نموذج الانحدار المتعدد بدوره خطيا أو غير خطي.

I-1- تذكير بأهم القواعد النظرية:

I-1-1 تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط :

لنفرض أنه كان لدينا مؤشرين(y، x) يمثلان ظاهرة ما (y) والعنصر الأساسي المؤثر فيها هو (x). أزواج القيم التالية تمثل تطور المؤشرين المذكورين: $y : y_1, y_2, \ldots, y_n$; $x : x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(y) : هو المتغير التابع أو المفسر وهو يعبر عن القيم الفعلية أو الناتج.

(x) : هو المتغير المستقل أو المفسر وهو يعبر عن القيم المسببة.

إن العلاقة الخطية البسيطة بين مؤشرين هي العلاقة المستقيمة التي يعبر عنها بواسطة معادلة مستقيم من الشكل: $y = a + bx + \varepsilon$ ، وهي تعبر عن أبسط العلاقات الرياضية التي تمثل بها العلاقة بين مؤشرين . من أجل إمكانية تقدير هذه المعادلة يجب أولا تمثيل المعطيات الخاصة بتطور المؤشرين بيانيا ، أي نقوم قبل كل شيء برسم شكل الانتشار للنقاط الهندسية التي احداثياتها الأزواج المرتبة لقيم (y, x) أي النقاط (x_i, y_i) على محورين. بتوصيل النقاط الهندسية نحصل على المنحنى الطبيعي لتطور (y) نتيجة لتغير(x). المنحنى الطبيعي يسمح لنا بالتعرف على طبيعة الاتجاه العام لتطور الظاهرة المدروسة. إذا كان شكل الانتشار يشبه أو يقارب شكل خط مستقيم، عندها نقترح تمثيل تلك العلاقة بمعادلة مستقيم. أما إذا كان شكل الانتشار يختلف عن الخط المستقيم فإننا نقترح في هذه الحالة معادلة أخرى غير مستقيمة لتمثيل تلك العلاقة.

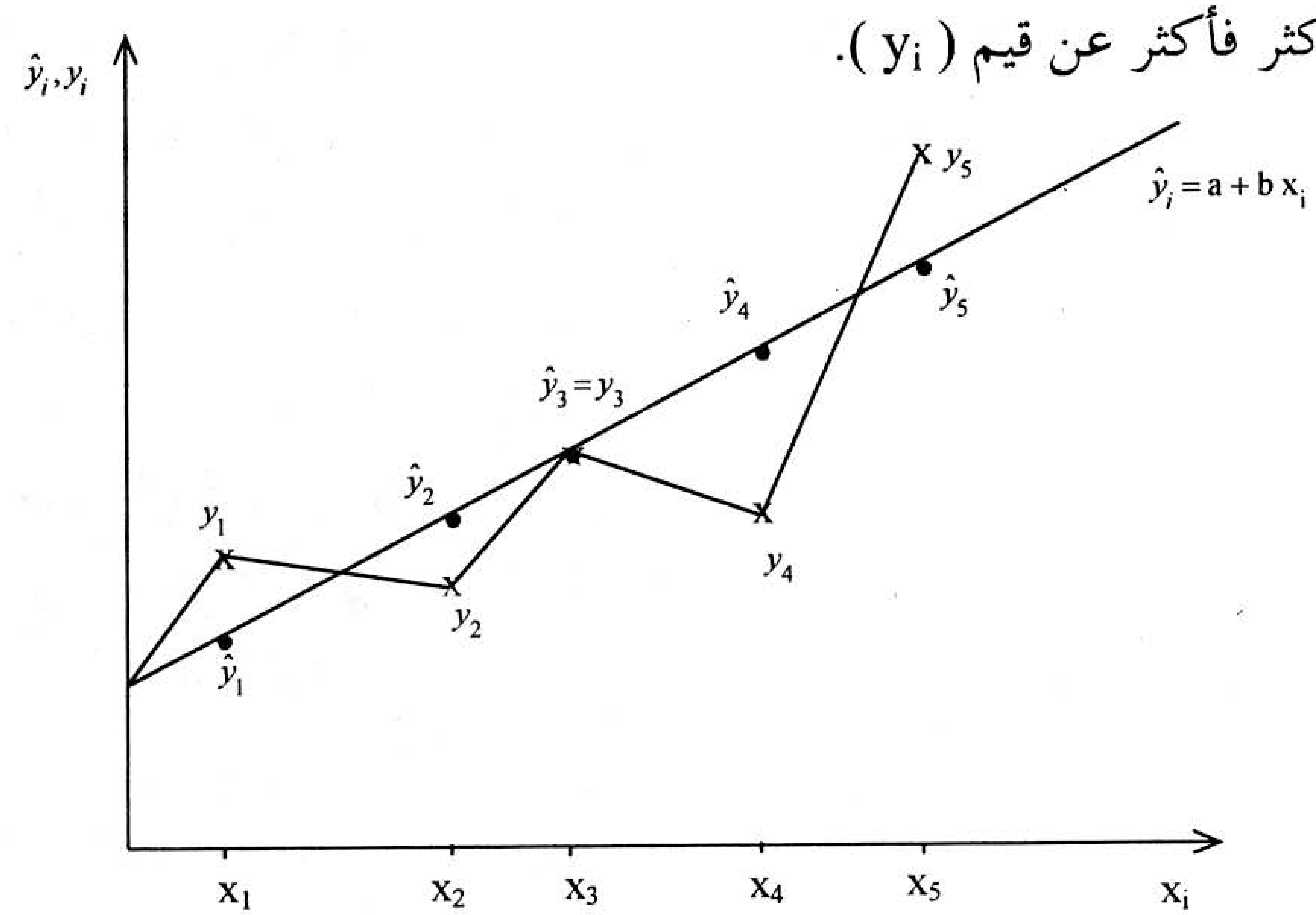
عندما يتم رسم المنحنى التمهيدي الممثل للاتجاه العام، فإننا نجد أن كل قيمة لـــ (x_i) تناظرها قيمتان للظاهرة المدروسة: إحداهما هي قيمتها الطبيعية (الأصلية أو الفعلية) والتي نرمز لها بـــ(y_i) والأخرى هي القيمة التي يحددها المنحنى الذي رسمناه ونرمز لها بـــ($\hat{y}_i$) وتسمى بالقيمة التقديرية(النظرية). القيم التقديرية تختلف عادة عن القيم الفعلية. مقدار هذا الاختلاف يرمز له عادة بالرمز (ε_t) ويسمى بالخطأ المرتكب في تقدير قيم (y_i). فالقيمة الفعلية (y_i) للظاهرة المدروسة هي عبارة عن القيمة النظرية ($\hat{y}_i$) المحصل عليها بواسطة معادلة الانحدار المقترحة لتمثيل هذه الظاهرة زائد حد الخطأ المرتكب (ε_i). أي أن: $y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i$. قيمة ($\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$) تكون ناجمة عن تأثير الأخطاء المرتكبة في إعداد نموذج الانحدار المقترح. من بين هذه الأخطاء يمكن أن نشير إلى:

- الخطأ في اختيار نوع معادلة التمثيل: إن مقدار الخطأ المرتكب في تقدير قيمة (y_i) عن طريق قيم ($\hat{y}_i$) يتوقف كثيرا على صحة ودقة اختيار معادلة الانحدار المقترحة لتمثيل الظاهرة المدروسة.

- أخطاء القياس: وهي الأخطاء الممكن ارتكابها عند قياس قيم المؤشرات(y_i, x_i) التي تعبر عن تطور الظاهرة المدروسة والعوامل التي تتحكم فيها. هذه الأخطاء سوف تؤثر، من خلال نموذج الانحدار المقترح، على قيم (y_i) التقديرية.

- الأخطاء غير المفسرة: وهي أخطاء تنتج عن إهمال بعض العوامل (أساسية أو غير أساسية) المؤثرة في الظاهرة المدروسة وعدم إبرازها في نموذج الانحدار المقترح. عدم تمثيل هذه العوامل في المعادلة الرياضية

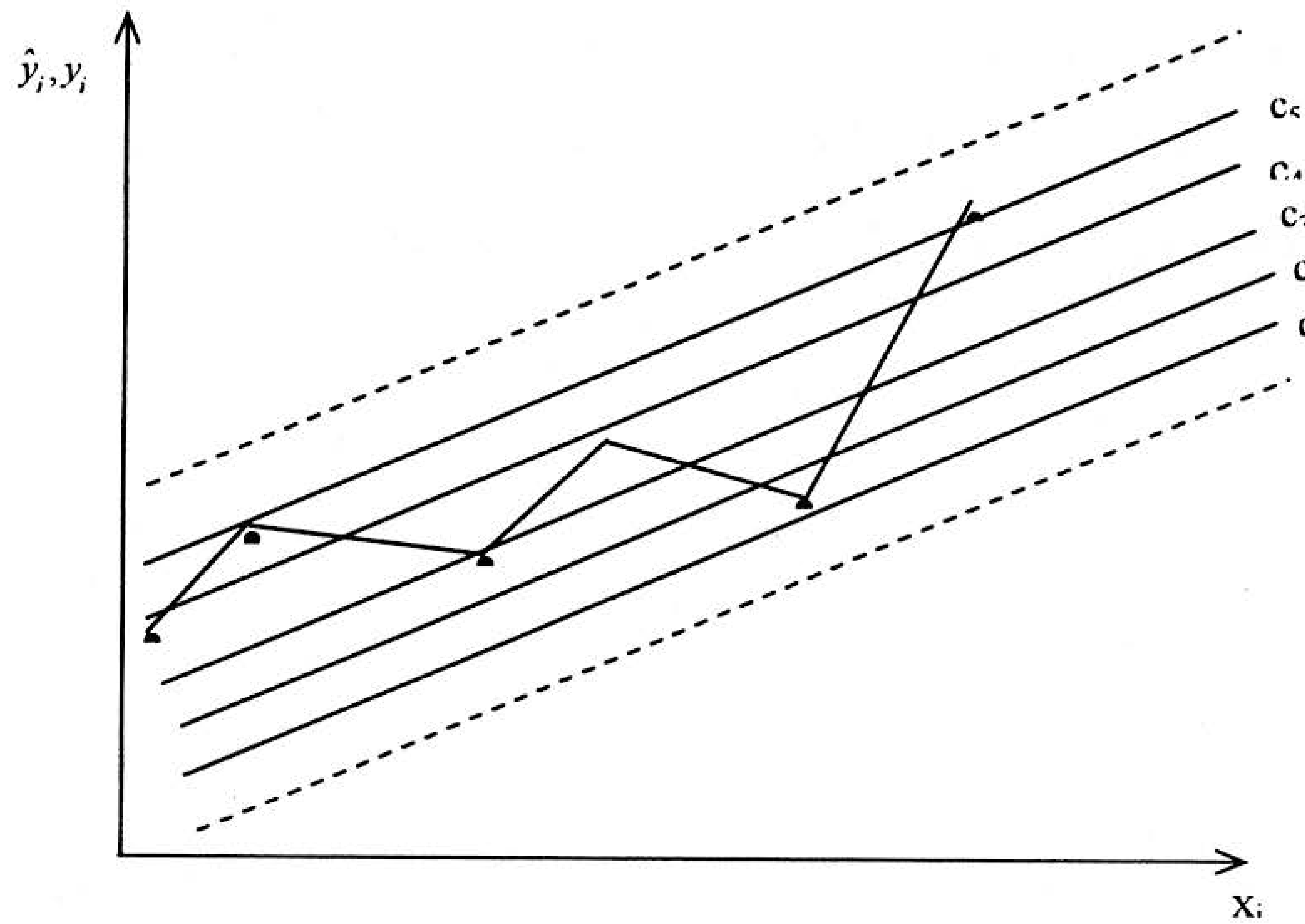
يؤثر أيضا على قيم ($\hat{y}_i$) المحصل عليها بواسطة هذه المعادلة ويبعدها أكثر فأكثر عن قيم (y_i).



حجم الخطأ المرتكب (ε_i) يتأثر أيضا بالعوامل العشوائية التي يمكن أن تؤثر على الظاهرة عرضا أو فجأة. كما يتأثر بالجوانب المتعلقة بمدى شمولية المعطيات المستعملة في تقدير النموذج لجميع قيم وحالات الظاهرة المدروسة(أنظر الشكل أعلاه).

إن منحنى الاتجاه العام يمثل سير الظاهرة (y_i) لو لم تؤثر عليها عوامل أخرى غير العنصر (x_i)، تؤدي إلى دفع بعض القيم إلى أعلى و بعضها إلى أسفل من المستقيم الممثل للاتجاه العام. بعد أن يتم تحديد المنحنى العام التمهيدي الذي يبين الشكل العام لتطور الظاهرة (مثلا خط مستقيم)، ننتقل إلى مرحلة اختيار المنحنى الأمثل الذي يمثل العلاقة المدروسة أحسن تمثيل. من بين عدد لا نهائي من

المستقيمات ($c_n, \ldots , c_3 , c_2 , c_1$) التي يمكن أن تمثل الاتجاه العام، كيف نختار ذلك الذي يعبر عن خصوصية العلاقة المدروسة أحسن من غيره. بمعنى آخر ما هو المقياس الذي بموجبه نحكم عن واحد من المستقيمات السابقة

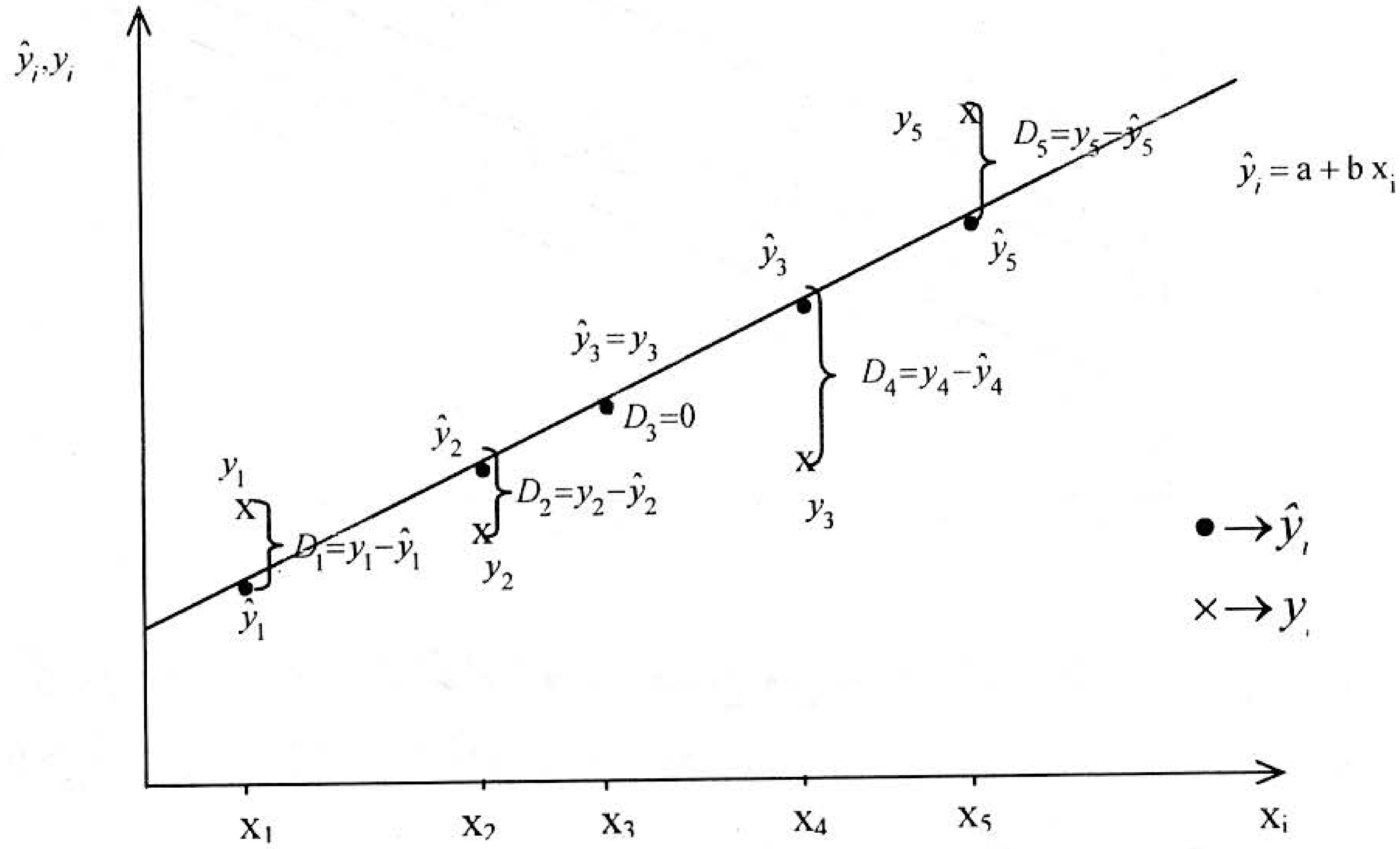


بأنه هو الذي يمثل الاتجاه العام أحسن من غيره. إن أفضل مستقيم يمثل الاتجاه العام لتطور الظاهرة هو ذلك الذي يمر بأكبر عدد ممكن من نقاط المنحنى الطبيعي الممثل للقيم الفعلية للظاهرة أو على الأقل المستقيم الذي يقترب من أكبر عدد ممكن منها.

بهدف الإيضاح نورد الشكل التالي الذي يعكس نقاط البيانات (المشاهدات) الفعلية لظاهرة ما ومنحنى الاتجاه العام (C) المعبر عن القيم التقديرية للظاهرة، المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير المستقل(x_i) . إن القيم التقديرية ($\hat{y}_i$) المحصل عليها بواسطة معادلة المستقيم (c) هي

قيم تقريبية، لذلك غالبا ما يكون هناك فرق بين هذه القيم الممثلة على الرسم بعلامة (•) والقيم الفعلية (y_i) الممثلة بعلامة (×).

نعبر عن هذا الفرق، كما أشرنا سابقا، بالرمز ε_i ؛ أي: $\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ و الذي يسمى أحيانا بانحراف القيم الأصلية عن القيم التقديرية (D). عندئذ يكون لكل قيمة X_i فرق D_i الذي يقابلها. هذا الفرق قد يكون موجبا، سالبا أو يساوي صفر: $(y_i = \hat{y}_i ; y_i \rangle \hat{y}_i ; y_i \langle \hat{y}_i)$.



المنحنى الأمثل الذي يمثل الاتجاه العام أحسن تمثيل هو ذلك الذي يكون فيه الفرق بين كل قيمة($\hat{y}_i$) واقعة عليه (القيمة التقديرية) و القيمة الفعلية للظاهرة (y_i) أقل ما يمكن. بمعنى آخر، من بين المنحنيات المختلفة الممكنة نسعى إلى اختيار ذلك المنحنى الذي يشمل أكبر عدد ممكن من القيم الفعلية(y_i) أو يقترب جدا منها. إذا لم يتسنى ذلك فعلى الأقل يكون الفرق بين القيم الفعلية و القيم التقديرية

أقل ما يمكن، أي الذي يكون عنده الانحراف D_i عند كل نقطة (x_i)
أقل ما يمكن. أي أن :

$$D_n \longrightarrow \min , \ldots\ldots, D_2 \rightarrow \min , D_1 \rightarrow \min$$

بالنسبة للمنحنى ككل يجب أن يكون مجموع هذه الانحرافات أقل ما
يمكن : $S = \{ D_1 + D_2 + .. D_n \} \longrightarrow \min$

$$S = \Sigma D_i \longrightarrow \min$$

بما أن قيم (D_i) يمكن أن تكون سالبة، موجبة أو تساوي الصفر، فيمكن أن نحصل على نتيجة خاطئة، حيث أن قيم D_i) الموجبة تلغي قيمها السالبة. بمعنى آخر المجموع(S) يمكن أن يقترب من(min) بفعل تأثير القيم السالبة لـــ D_i على قيمها الموجبة فقط؛ فنجد أن (S)تقترب من(min) بدون أن تقترب كل(Di) من(min). من أجل تجنب ذلك، أي من أجل أن تقترب (s)من قيمتها الدنيا و في نفس الوقت تقترب كلD_i من min، يجب أن نأخذ الانحرافات بقيمتها الموجبة فقط ، بمعنى نأخذ$|D_i|$.

عندئذ نعبر عن المجموع(S) كالتالي : $S = \sum_{i=1}^{n} |D_i| \longrightarrow \min$.

إن إيجاد النهاية الصغرى لهذا المجموع بقيمته المطلقة يعقد الحساب نوعا ما، ومن الأفضل أن نأخذ مربعات الفروق أي (D_i^2). لذلك فإن قياس جودة تمثيل المنحنى(c) للبيانات المعطاة تكون عن طريق إيجاد النهاية الصغرى لمجموع مربعات الفروق أو انحرافات القيم الأصلية عن القيم التقديرية (s)كالتالي: $S = \sum_{i=1}^{n} (D_i)^2 \longrightarrow \min$.

إذا لم يتحقق هذا الشرط، فإن المنحنى المقترح هو منحنى سيئ التمثيل.
إن المنحنى الذي يتحقق عنده الشرط السابق، أي الذي يصل عنده

(s) إلى نهايته الصغرى يسمى بمنحنى المربعات الصغرى، مهما كان نوع هذا المنحنى (خط مستقيم ، قطع مكافئ،.... الخ).

إذا عبرنا عن المجموع (S) كالتالي: $S = \sum_{c=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \longrightarrow \min$

حيث أن: $\hat{y}_i = a + bx_i$ و $D_i = y_i - \hat{y}_i$

فتكون قيم$\hat{y}$ الواقعة على هذا الخط المستقيم المقابلة لــ(x_i) هي:

$(\hat{y}_1 = a + bx_1\ ,\ \hat{y}_2 = a + bx_2\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ \hat{y}_n = a + bx_n)$،

أما القيم الفعلية للظاهرة فهي على التوالي: $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$.

يمكن كتابة الشرط السابق للحصول على أفضل منحنى يمثل الاتجاه العام للظاهرة المدروسة كالتالي:

$$S = (y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \ldots\ldots, + (y_n - a - bx_n)^2 \longrightarrow \min$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \longrightarrow \min .$$

بما أن $(x_i), (y_i)$ هي قيم فعلية معلومة ل(x)و(y) ، فإن (s) يصبح تابعا للثابتين (a ,b) اللذان يصبحان هما المجهولان. نعتبر أن s(a , b) هي دالة في مجهولين (a,b) ونبحث عن نهايتها الصغرى، التي تسمح بحساب قيم (a , b) ، وهي معاملات معادلة المستقيم $\hat{y}_i = a + bx_i$ الذي يمثل الاتجاه العام أحسن تمثيل. بتعبير آخر يكون للدالة S(a,b) نهاية صغرى عندما يكون ذلك المستقيم أقرب ما يمكن إلى جميع النقاط الهندسية المرسومة على الشكل (أي قيمy الأصلية).

إننا نعلم أن الدالة S(a,b) تمر بنهاية ما عندما تكون كلا المشتقتين الجزئيتين لها بالنسبة لـــ (a, b)مساويتين للصفر.

أي عندما تتحقق المعادلتين التاليتين: $\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = 0$.

إن كلا من هذين المعادلتين تتضمن الثابتين(a,b). بحل هذين المعادلتين مع بعض، يمكننا تحديد قيمة كل من(a ,b) الموافقتين للنهاية المحصل عليها للتابع(s). أي الموافقتين لوضعية ما للمستقيم $\hat{y} = a + bx_i$ التي تجعله يمثل العلاقة المفروضة بين(x, y) أفضل تمثيل. عند تعويض قيم (a,b)المحصل عليهما في معادلة مستقيم الاتجاه العام نحصل على معادلة مستقيم معلوم. نتأكد من النهاية المحصل عليها، هل هي كبرى، صغرى أم نقطة انعطاف، وذلك بإيجاد المشتقات الجزئية الثانية لـــ (s) بالنسبة لـ(a,b).أي نجد (S''_{aa}, S''_{bb}وS''_{ab})، ثم نكون المحدد (Δ).

إذا كان : $\Delta > 0$ فإن النهاية المحصل عليها هي نهاية صغرى.

لدينا: $$S_{a,b} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2}{\partial b} ; \frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2}{\partial a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \partial (y_i - a - bx_i)^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2 (y_i - a - bx_i).(-1)$$

نضع هذا المقدار = 0 و نضرب الطرفين في($-\frac{1}{2}$) فنحصل على الشكل التالي :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - na - b\Sigma x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i = na + b\Sigma x_i}$$

وأيضا :

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \Sigma\, 2(y_i - a - bx_i)\,(-\,x_i) = 0$$

$$= \Sigma\,(y_i - a - bx_i)\,(x_i) = 0$$

$$= \Sigma\,(y_{i..}\,x_i - a.x_i - b.x_i^2) = 0$$

$$= \Sigma\,(y_i.x_i) - a.\Sigma x_i - b\Sigma x_i^2 = 0$$

$$\mathbf{\Sigma(y_i.x_i) = a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2}$$

تسمى هذين المعادلتين بالمعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى . بحل هذين المعادلتين مع بعض نجد قيمة كل من(b), (a) المطلوبتين لتحقيق شرط المربعات الصغرى. حيث أن قيم (y_i), (x_i) هي قيم معلومة.

إذا كتبنا المقدارين المحصل عليهما في شكل معادلتين كالتالي:

$$\begin{cases} na + b.\Sigma x_i = \Sigma y_i \\ a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 = \Sigma(y_i.x_i) \end{cases}$$

فإن حل هذين المعادلتين يمكن أن يكون عن طريق المحددات أو عن طريق التعويض. إذا رمزنا بـــ Δ , Δ_b , Δ_a للمحددات التالية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} \Sigma y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma y_i.x_i & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma y_i.x_i \end{vmatrix}$$

فإن قيمة كل من (a,b) تحسب من العلاقتين التاليتين:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}\ ,\quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}\ ;\quad \text{حيث أن: } \Delta \neq 0$$

بذلك تصبح معادلة المستقيم المطلوب والذي يمثل العلاقة بين (x, y) على الشكل التالي: $\hat{y}_i = \frac{\Delta a}{\Delta} + \frac{\Delta b}{\Delta}\,.\,x_i$

إن المعادلة الأخيرة محسوبة على أساس شرط أن يكون مربع انحرافات القيم الفعلية للمؤشر التابع(y_i) عن القيم النظرية المحسوبة عن طريق المعادلة $\hat{y}_i = a + bx_i$ أصغر ما يمكن. مما يجعل المستقيم الممثل للمعادلة الأخيرة أفضل مستقيم من بين المستقيمات الممكنة لتمثيل العلاقة بين المؤشرين (x, y).

حساب (a,b) بالتعويض:

لدينا:

$$na + b\,\Sigma x_i = \Sigma\, y_i$$

$$a = \frac{\Sigma y_i - b.\Sigma x_i}{n}$$

وأيضا : $a.\Sigma x_i + b\Sigma x_i^2 = \Sigma(y_i.x_i)$

بتعويض قيمة (a) في هذه المعادلة ينتج :

$$(\Sigma y_i)(\Sigma x_i) - b\,(\Sigma x_i)^2 + n\,.b.\,\Sigma x_i^2 = \Sigma(y_i.x_i)$$

$$b = \frac{n.\Sigma(y_i\,.\,x_i) - (\Sigma y_i).(\Sigma x_i)}{n.\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

عند هذين القيمتين لـ (a,b) تكون للدالة $S(a,b)$ نهاية ما.

للتأكد من نوع هذه النهاية، نكون المشتقة الثانية لـــ (S) بالنسبة لـــ (a,b).

$$\frac{\partial S}{\partial a} = na + b\Sigma x_i - \Sigma y_i = 0$$

$$\frac{\partial Sa}{\partial a} = S''_{aa} = \frac{\partial(na + b\,.\,\Sigma x_i - \Sigma y_i)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial Sa}{\partial a} = S''_{aa} = n$$

$$\frac{\partial Sb}{\partial a} = S''_{ba} = \Sigma x_i \quad ; \quad \frac{\partial Sa}{\partial b} = S''_{ab} = \Sigma x_i \quad ;$$

$$\frac{\partial Sb}{\partial b} = S''_{bb} = \Sigma x_i^2$$

إذا رمزنا ل $S''_{aa} = n$ بالرمز A ، لـ $S''_{ab}=\Sigma x_i$ بالرمز B ، لـ$S''_{ba}=\Sigma x_i$ بالرمز C ولـ$S''_{bb}=\Sigma x_i^2$ بالرمز D ؛ فإن :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمته : $\Delta = n \,.\, \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2 > 0$

إن المقدار$n.\, \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2$ يكون دائما أكبر من الصفر وبالتالي فإن النهاية المحصل عليها هي نهاية صغرى. يمكننا أن نستخرج علاقة أخرى لحساب (a,b) انطلاقا من العلاقة المحصل عليها سابقا. إذا قسمنا كل أطراف عبارة(b) على (n^2) أو إذا وضعنا هذه الأطراف كالتالي:

$$\frac{\Sigma y_i}{n} = \bar{y} \longrightarrow \Sigma y_i = n.\bar{y}$$

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{x} \longrightarrow \Sigma x_i = n.\bar{x}$$

$$\frac{\Sigma(y_i . x_i)}{n} = \overline{y.x} \longrightarrow \Sigma(y_i . x_i) = n \,.\, (\overline{x.y})$$

فتصبح علاقة استخراج المعامل(b) السابقة كالتالي:

$$b = \frac{n.(n.\overline{x.y}) - (n.\bar{y}).(n.\bar{x})}{n^2.\left[\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n^2}\right]}$$

$$b = \frac{n^2.\left[(\overline{x.y}) - \bar{y}.\bar{x}\right]}{n^2.\left[\overline{x^2} - \bar{x}^2\right]} \longrightarrow b = \frac{\overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

ويمكن حساب b أيضا من العبارة التالية: $b = \frac{\overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}}{\sigma_x^2}$

وعبارة استخراج المعامل(a) هي : $a = \frac{\Sigma y_i}{n} - \frac{b.\Sigma x_i}{n} = \bar{y} - b.\bar{x}$.

إذا ما عوضنا المتغيرات (y , x) بانحرافاتهما عن وسطهما الحسابي، أي ب: $(x-\bar{x})$ و $(y-\bar{y})$ ، فإن المستقيم الممثل لمعادلة الانحدار الخطية سوف يبدأ من نقطة بداية المحاور (oy_i) , (ox_i) على الرسم البياني وهذا لن يغير من قيمة معاملات معادلة الانحدار(a,b)المحصل عليهما سابقا:

$$b = \frac{\Sigma\left[(y_i - \bar{y}).(x_i - \bar{x})\right]}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}$$

I-1-2 تقدير نموذج الانحدار غير الخطي البسيط:

لقد تعرضنا سابقا إلى تقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط الممثل بمعادلة خط مستقيم، الآن سوف نتناول تقدير معادلات النموذج المنحني البسيط. إن النماذج القياسية المنحنية البسيطة تمثلها معادلات قد تكون في شكل منحنى قطع زائد الممثل بالمعادلة:

$$y_i = a + \frac{b}{x_i} + \varepsilon$$

أو على شكل منحنى لوغاريتمي: $y_i = a + b\log x_i + \varepsilon$

منحنى أصم: $y_i = a\,.\,x_i^b + \varepsilon$

منحنى أسي: $y_i = ab^x\,.\,\varepsilon$

$$y_i = a\,e^{bx}\,.\,\varepsilon$$

$$y_i = a\,.\,10^{bx}\,.\varepsilon$$

كما قد تكون منحنيات من الدرجة الثانية (منحنى قطع مكافئ):

من الشكل: $y_i = a + bx + cx^2 + \varepsilon$ أو من الدرجة الثالثة

$y_i = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$ أو بصورة عامة من الدرجة n :

$y_i = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots + Sx^n + \varepsilon$ أو غيرهم، حيث أن الثوابت

$(\ldots\ldots c,b,a) =$ هي أعداد حقيقية.

يمكننا إجراء نفس المناقشة السابقة عند دراستنا للشكل المستقيم على كل معادلة من المعادلات السابقة على حدة لنحصل على نتائج مشابهة لما حصلنا عليه عند مناقشة معادلة المستقيم. بمعنى أن وضعية أي من المنحنيات السابقة تتحدد فقط عندما نحدد الثوابت العددية الداخلة في المعادلة التي تمثلها.

كما رأينا في دراسة النموذج الخطي البسيط، فإن مهمتنا الآن تتمثل في تقدير ثوابت معادلة النموذج الرياضي المقترح إذا كان شكل انتشار قيم الظاهرة في المستوى الإحداثي أخذ شكل غير مستقيم (شكل ملتوي أو منحني)، فيمكننا في هذه الحالة اقتراح صيغة (أو نموذج) لتمثيل العلاقة المدروسة بين(x, y)تمثيلا حسنا في شكل معادلة منحنى مثل تلك التي أشرنا إليها أعلاه.

سنحاول الآن أن نجري تقدير للعلاقة القياسية المنحنية البسيطة عن طريق كل من المعادلات المنحنية السابقة وحساب قيم ثوابت كل منها، بحيث يتحقق لدينا دائما الشرط السابق الذكر:

$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$ و الذي يعني أن مجموع مربعات فروقات القيم التقديرية للظاهرة عن قيمها الفعلية هو أصغر ما يمكن.

A – التمثيل بواسطة معادلة من الشكل : $y_i = a.x^b_i + \varepsilon$

إن هذه المعادلة التمثيلية ترسم عل المستوى الإحداثي منحنيا كما في الشكل أدناه. لكي يتم تقدير هذه المعادلة، نشكل الدالة $S(a,b)$ التي تقتضي أن نقارن بين $(\hat{y}_i)$ و (y_i) ونأخذ مجموع مربع فروقاهما، حيث نجد أن: $S = \Sigma (y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma (y_i - a.x^b_i)^2 = \min$

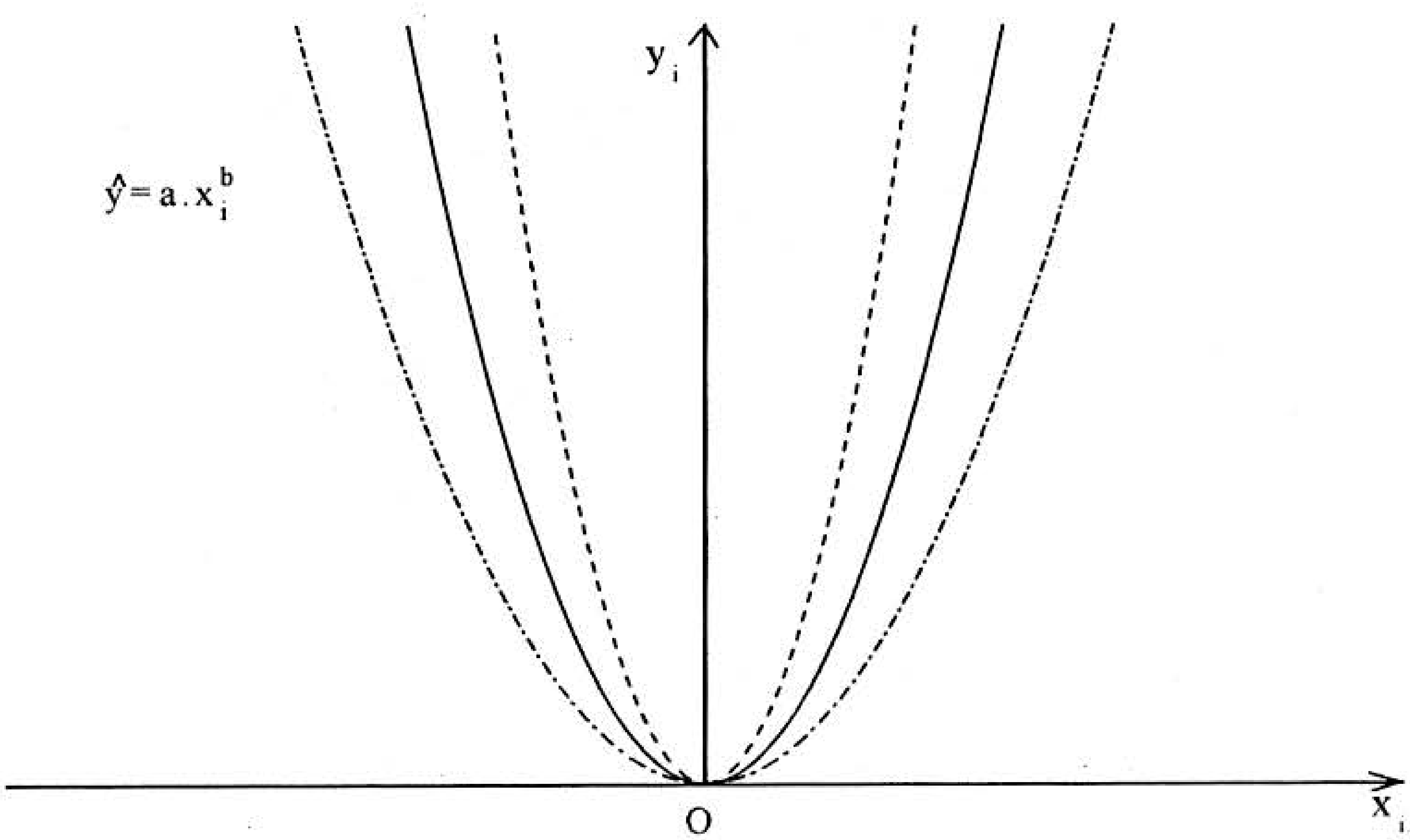
بأخذ المشتقتين الجزئيتين لـــ (s)بالنسبة ل (a,b) ووضعهما مساويان للصفر نجد أن نتيجة الاشتقاق لا تعطينا معادلتين خطيتين تسمحان بحساب(a,b) لذلك نلجأ إلى أخذ لوغاريتم الطرفين حتى نحول المعادلة السابقة من شكلها الأصلي إلى الشكل الخطي:

$$\hat{y}_i = a\, x^b \longrightarrow \log \hat{y}_i = \log a x^b_i$$

$$\mathbf{\log \hat{y}_i = \log a + b \log x_i}$$

نعبر عن المقادير الموجودة في هذه العبارة بمتغيرات جديدة كالتالي:

$$\log \hat{y}_i = \hat{Y}_i \quad , \quad \log a = A \quad , \quad \log x = X_i$$



فتصبح العبارة السابقة كالتالي : $\hat{Y}_i = A + b.X_i$

إن هذه المعادلة ما هي إلا معادلة مستقيم بالنسبة "لـ" X_i , $\hat{Y}_i$.

لحساب الثواب b, A ننطلق أيضا من الشرط:

$S = \Sigma (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$. لكن لابد لنا أن ننتبه هنا إلى أن تطبيق الشرط المذكور معرف على مقارنة قيم(y_i) الفعلية بقيم ($\hat{y}_i$)النظرية، وإذا أمعنا النظر في المعادلة $\hat{Y}_i = A + b X_i$ وبالفرضيات السابقة لها لوجدنا أن قيم ($\hat{Y}_i$) ما هي إلا لوغاريتم قيم($\hat{y}$). حتى نستطيع أن نطبق الشرط $S(a,b) = \min$ لا بد لنا أن نقارن قيم $\hat{Y}_i$ مع لوغاريتم (y_i)الفعلية، بذلك يصبح الشرط$S(a,b) = \min$ على الشكل التالي:

$$S = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i) = \Sigma (\log y_i - \log \hat{y}_i)^2 = \Sigma (\log y_i - \hat{Y}_i)^2$$

إذا وضعنا : $Y_i = \log y$ ،

فإن : $$S = \Sigma (Y_i - A - b X_i)^2 = \min$$

نشتق بالنسبة لــ(b),(A) كما في حالة المستقيم فنحصل على المعادلتين العاديتين للمربعات الصغرى وهما :

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \Sigma\, 2.(Y_i - A - bX_i)\,(-1) = 0$$

$$\Sigma(Y_i - A - bX_i) = 0$$
$$\Sigma Y_i - n A - b.\Sigma X_i = 0$$
$$\mathbf{\Sigma Y_i = n.A + b.\Sigma X_i \;\ldots\ldots\; (1)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \Sigma\, 2(Y_i - A - bX_i)\,(- X_i) = 0$$
$$= \Sigma(Y_i - A - bX_i)\,(X_i) = 0$$
$$\Sigma(y_i.x_i - A.x_i - bX_i^2) = 0$$
$$\Sigma(Y_i.X_i) - A.\Sigma X_i - b.\Sigma X_i^2 = 0$$
$$\mathbf{\Sigma(Y_i.X_i) = A.\Sigma X_i + b.\Sigma X_i^2 \;\ldots\ldots.(2)}$$

نتيجة لحل المعادلتين السابقتين نحصل على قيمتي كل من (A,b) ثم قيمة (a) كالتالي: $A = \frac{\Delta_A}{\Delta}\ ,\ \ b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$

للحصول على قيمة (a)نعود إلى الفرضية السابقة : $A = \log a$

والتي منها نحصل على قيمة a : $a = 10^{A}$

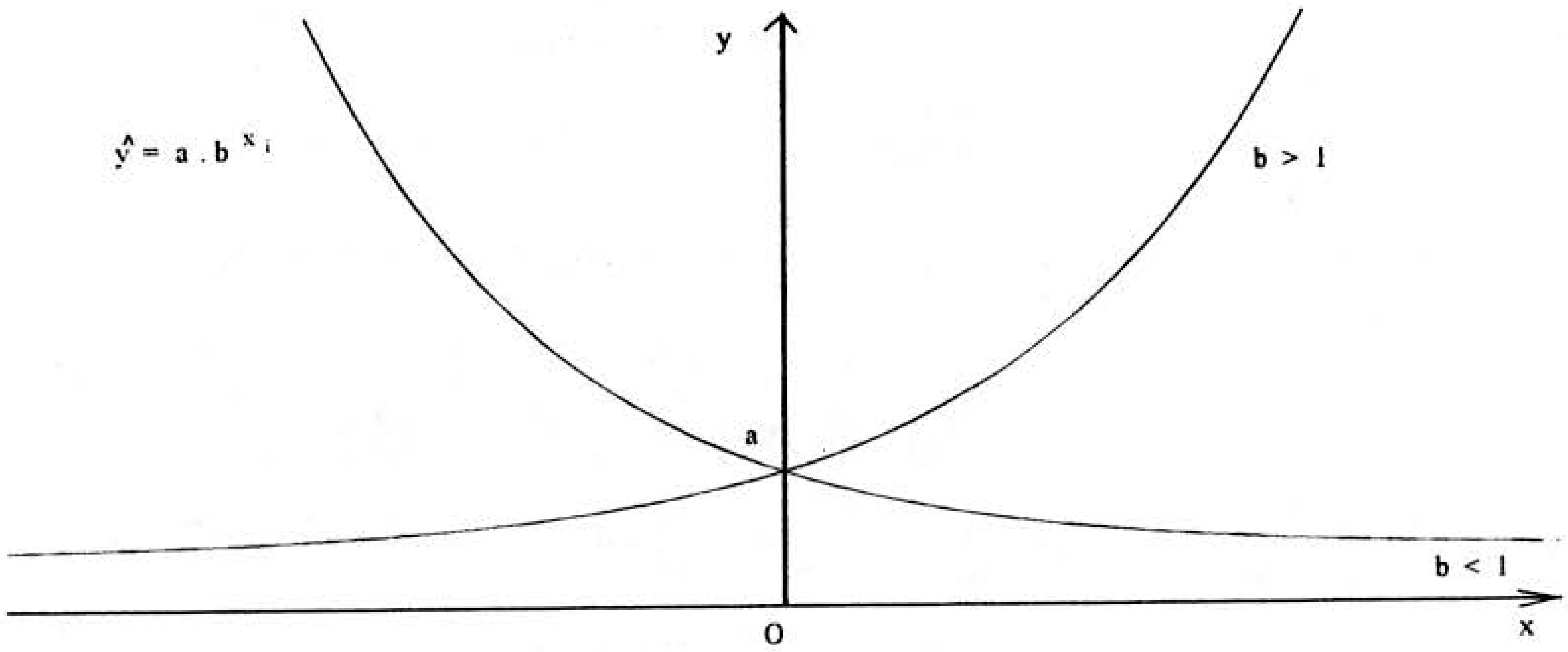
يمكن استعمال الصيغة الأخرى لحساب المعاملين (A,b):

لدينا : $A = \overline{Y} - b\,\overline{X} \quad ; \quad b = \frac{\overline{X.Y} - \overline{X}\,.\,\overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}$

وتكون المعادلة المطلوب تقديرها هي : $\hat{y}_i = 10^{A}\,.\,x^{b}$ ، حيث أن: $a = 10^{A}$. بتقديرنا لهذه المعادلة نكون قد حصلنا على أفضل معادلة من النوع: $\hat{y}_i = a x_i^{\,b}$ لتمثيل العلاقة المفروضة، ولكنها لا تعني بالضرورة أنها أحسن المعادلات الجبرية لتمثيل العلاقة بين (x,y).

B– التمثيل بواسطة معادلة من الشكل: $y_i = a.b^{x_i} + \varepsilon$

إن منحنيات هذه المعادلة تأخذ شكلين أساسيين على المستوي، وذلك حسب قيمةb . إذا كانت (b >1) فالمنحنى يكون متصاعدا (متزايدا) ، أما إذا كانت (b <1) فالمنحنى يكون متناقصا كما في الشكل التالي:



لتقدير ثوابت هذه المعادلة، نشكل شرط الدالة $S(a,b)$ الذي يقضي أن نقارن بين (y_i) و$(\hat{y}_i)$ و نأخذ مجموع مربع فروقاهما، حيث نجد أن :

$$S = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - ab^{xi})^2 = \min$$

نأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة التمثيلية من أجل تحويلها إلى الشكل الخطي كالتالي: $\text{Log } \hat{y}_i = \log a.b^x$

$$\textbf{Log } \hat{y}_i = \log a + x \log b$$

يصبح شكل المعادلة السابقة كالتالي: $\hat{Y}_i = A + B.x$

وذلك بوضع : $\hat{Y}_i = \log \hat{y}_i \ ,\ A = \log a \ ,\ B = \log b$

لحساب قيم الثابتين (A,B) المناسبة ننطلق من الشرط $S(a,b) = \min$ مع الانتباه إلى أنه بدلا من قيم (y_i) الفعلية يجب أن نأخذ$(\log y_i)$ ونقارنها مع$(\log \hat{y}_i)$. إذا وضعنا $\text{Log } y_i = Y_i$ فتكون الدالة(S) كالتالي :

$$S(A,B) = (Y_i - A - Bx_i)^2$$

نشتق (S) جزئيا بالنسبة لـــ(B,A) ونضع كلا المشتقين مساويا للصفر، فنحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \Sigma 2.(Y_i - A - B.x_i)(-1) = 0$$

$$= \Sigma(Y_i - A - B.x_i) = 0$$

$$\Sigma Y_i - n.A - B.\Sigma x_i = 0$$

$$\mathbf{\Sigma Y_i = n.A + B.\Sigma x_i}$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = \Sigma 2.(Y_i - A - B.x_i)(-x_i) = 0$$

$$\Sigma(Y_i - A - B.x_i)(x_i) = 0$$

$$\Sigma(y_i.x_i - A.x_i - B.x_i^2) = 0$$

$$\mathbf{\Sigma(Y_i.x_i) = A\Sigma x_i + B\Sigma x_i^2}$$

بحل المعادلتين السابقتين نحصل على الصيغ التي تسمح بحساب قيم كل من (B,A) ومن ثم نجد قيم $(b\ ,a)$ الأصليتين.

$$A = \bar{Y} - B . \bar{x} \quad ; \quad B = \frac{\overline{x.Y} - \bar{x} . \bar{Y}}{\overline{x_i^2} - \bar{x}_i^{\,2}}$$

$$A = \log a \longrightarrow a = 10^{A} \quad ; \quad B = \log b \longrightarrow b = 10^{B}$$

وتكون معادلة التمثيل الأصلية هي: $\hat{y}_i = a . b^{x_i} = 10^{A} . (10^{B})^{x_i}$

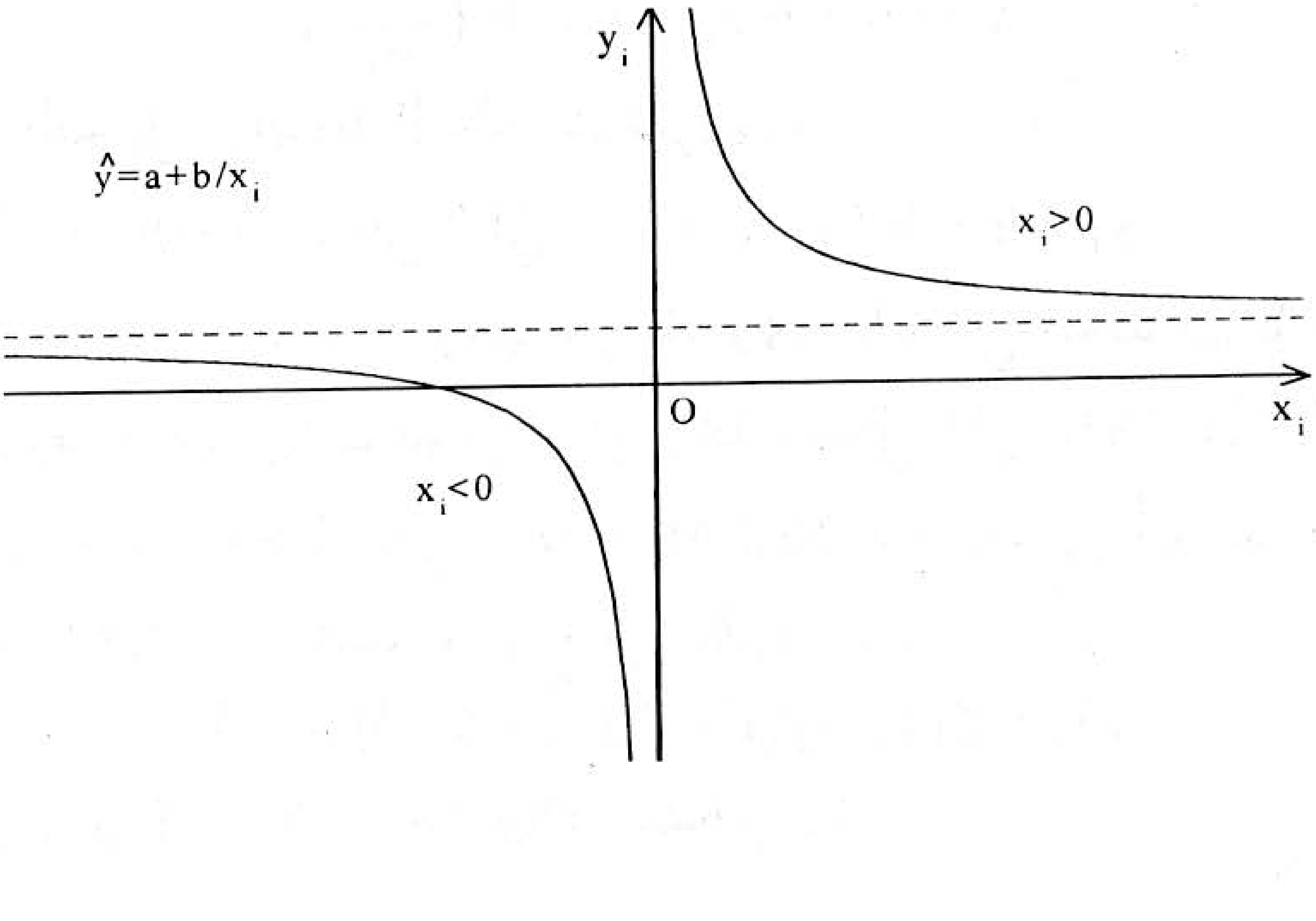
C – التمثيل بواسطة معادلة القطع الزائد من الشكل:

$y_i = a + \frac{b}{x_i} + \varepsilon$. القطع الزائد هو الرسم البياني للدالة التي تمثل معادلة من الدرجة الأولى في مقلوب المتغير المستقل.

الشكل العام البياني لهذه الدالة هو كالتالي (أنظر الرسم أدناه):

من مميزات هذه الدالة هو أن(y_i) تنتهي إلى (a) عندما تنتهي (x) $\longrightarrow \infty$. و تنتهي (y_i) إلى ∞ عندما ينتهي X إلى الصفر.

كما أن الخط البياني لهذه الدالة يمكن حصره بزاوية قائمة بحيث أن كل طرف منه يقارب أحد ضلعي تلك الزاوية. من أجل تقدير معاملات هذه المعادلة التمثيلية يجب هنا أيضا أن تكون:



$$S = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$$
$$S = \Sigma\,(y_i - a - \frac{b}{x_i})^2 = \min$$

نعبر عن($\frac{1}{x_i}$) بـ(z) مثلا، فتصبح المعادلة (S) كالتالي:

$$S = (y_i - a - b.z)^2 = \min$$

بإنجاز نفس الخطوات التي أجريناها بالنسبة للنماذج السابقة من أجل الحصول على العبارات التي تسمح بتقدير المعاملات (a,b)، نحصل على المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى:

$$na + b.\Sigma z_i = \Sigma y_i$$
$$a.\Sigma z + b.\Sigma z^2 = \Sigma(y.z)$$

ومنها نستخرج العبارات التي تسمح بحساب قيم a,b:

$$.b = \frac{\overline{y.z} - \overline{y}.\overline{z}}{\overline{z^2} - \overline{z}^2} \quad ; a = \overline{y} - b.\overline{z}$$

وتكون المعادلة المطلوب تقديرها والتي تمثل العلاقة بين (x, y) هي:

$$\hat{y}_i = a + b.z_i = a + b.(\frac{1}{x_i})$$

D – التمثيل بواسطة الدالة اللوغاريتمية:

تأخذ هذه الدالة الشكل التالي: $.y_i = a + b.\log x_i + \varepsilon$

إن هذه الدالة ترسم على المستوى الإحداثي منحنيا يتباطأ صعوده (أوهبوطه) كلما زادت قيمة X_i وهو يأخذ الشكل التالي: (أنظر الشكل أدناه)

لتقدير هذه المعادلة نكون الدالة S(a,b) التي تقضي أن نقارن بين (y_i)و($\hat{y}_i$) و نأخذ مجموع مربع فروقاهما حيث نجد أن:

$$.\ S = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma(y_i - a - b\log x_i)^2 = \min$$

نضع $X_i = \log x_i$ فتأخذ (S) الشكل التالي:

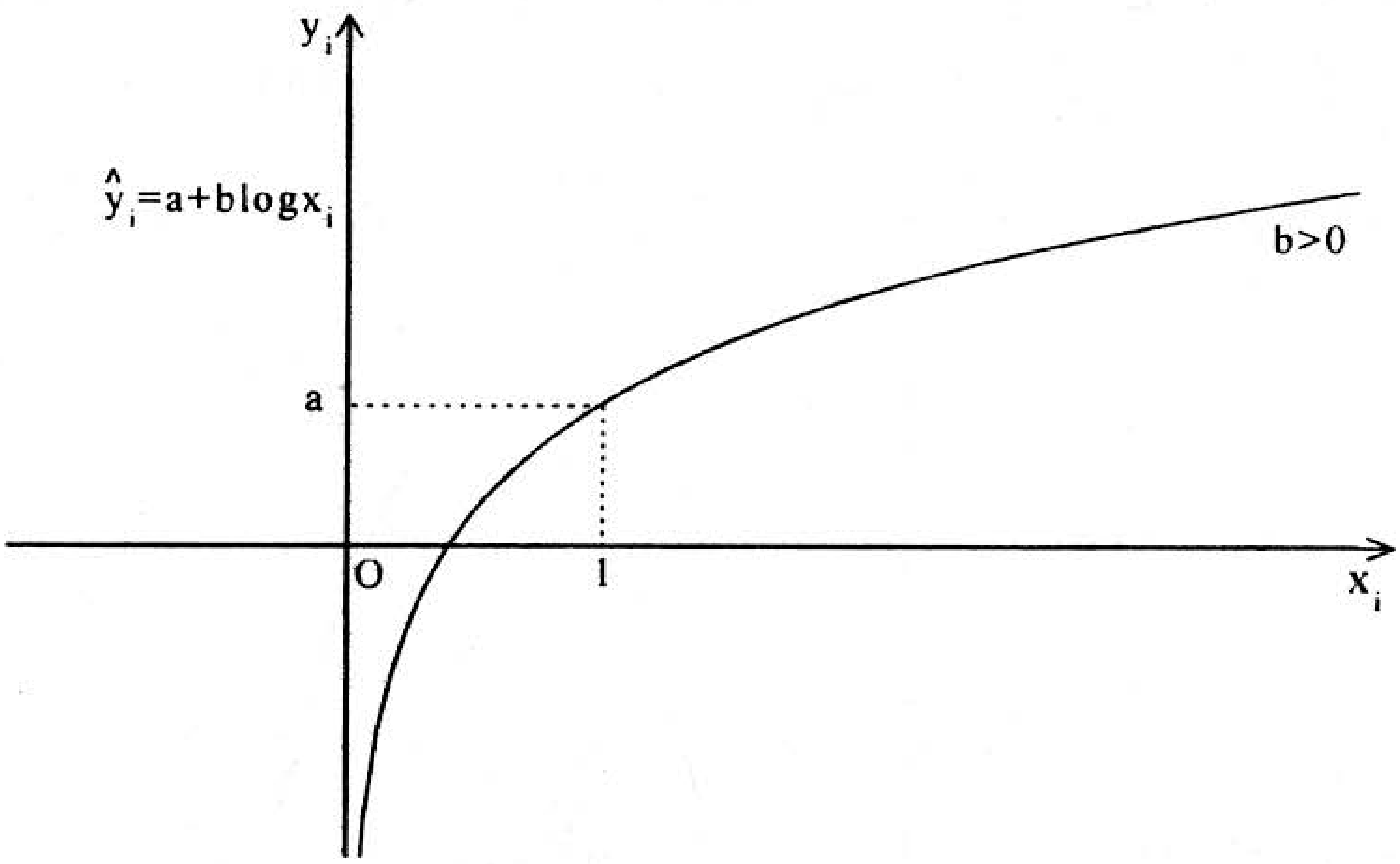
$$S = \Sigma(y_i - a - bX_i)^2 = \min$$

باشتقاق (S) بالنسبة لـــ b,a ووضعهما مساويين للصفر نجد أن :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \Sigma 2.(y_i - a - bX_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \Sigma 2.(y_i - a - bX_i)(-X_i) = 0$$

بعد الاختصار نحصل على المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى المناسبتين لهذه الحالة:



$$na + b.\Sigma X_i = \Sigma y_i$$

$$a.\Sigma X_i + b\Sigma(X_i)^2 = \Sigma(y_i.X)$$

بحل المعادلتين السابقتين نحصل على العبارات التي تسمح بحساب

(b, a) كالتالي: $\mathbf{b} = \dfrac{\overline{X.y} - \overline{X}.\overline{y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2}$; $a = \overline{X} - b.\overline{y}$

هذه العبارات تسمح بالحصول على المعادلة التمثيلية المطلوبة وهي:

$$\hat{y}_i = a + bX_i = a + b.\log x_i$$

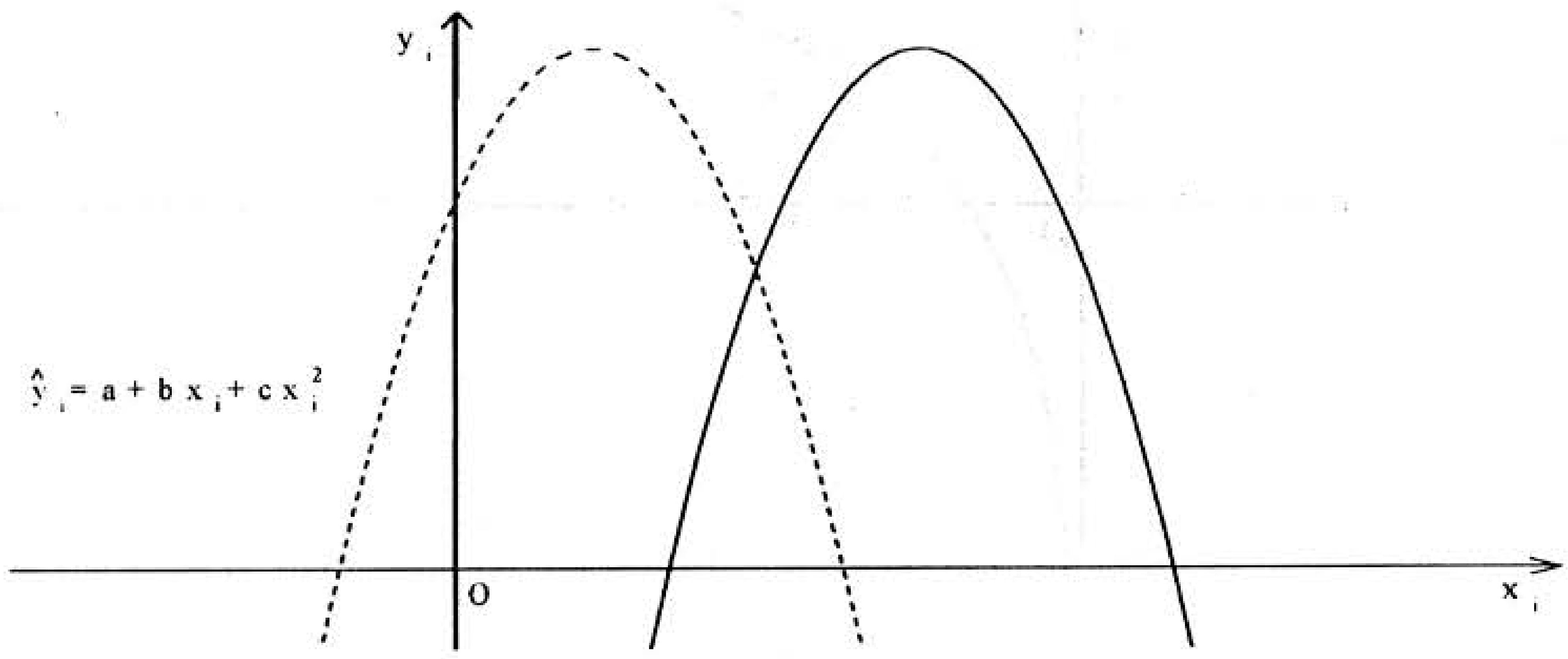
ونكون بذلك قد حصلنا على أفضل معادلة من نوعها تحقق الشرط . $S = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \min$

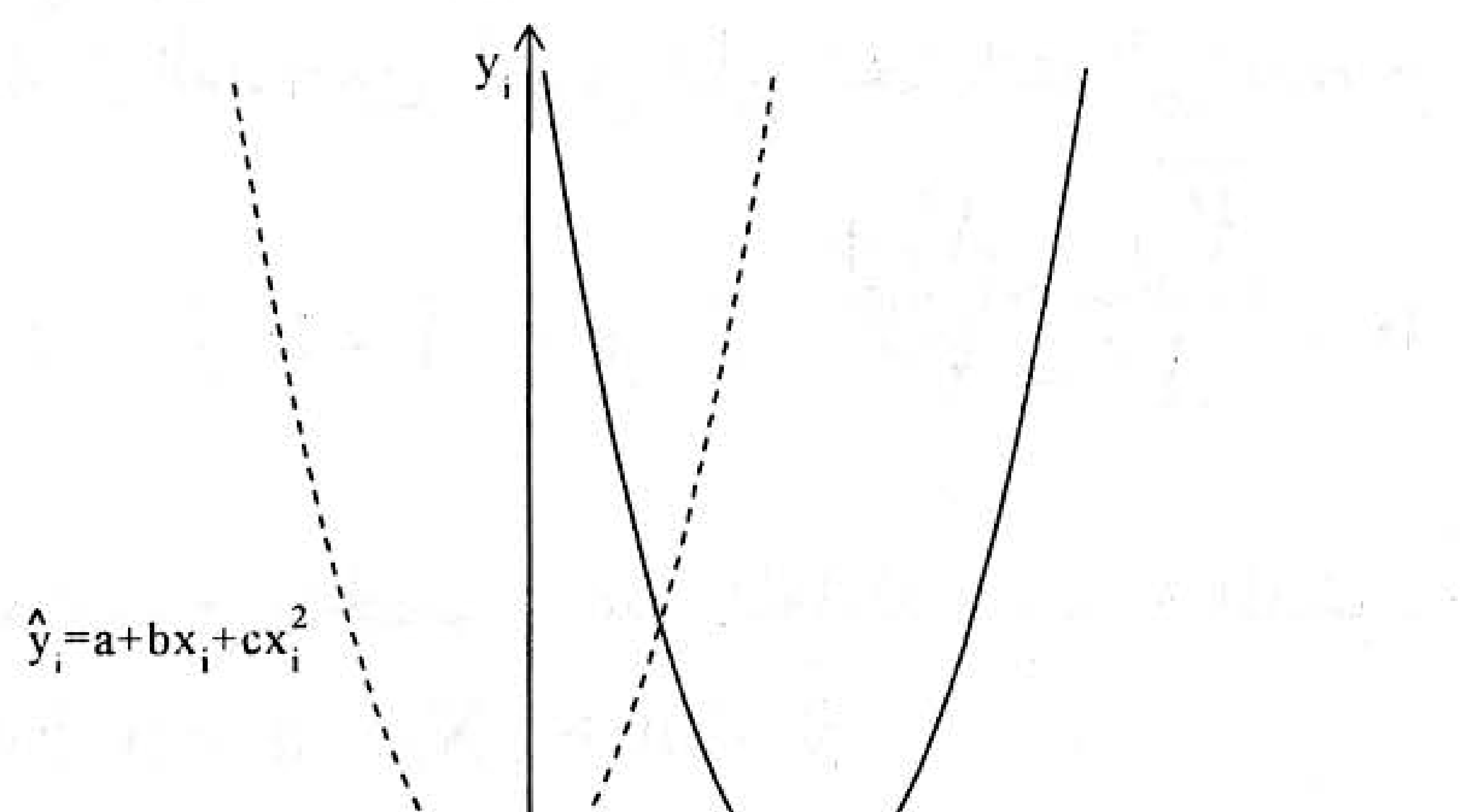
E - التمثيل بواسطة الدالة من الدرجة الثانية (د. القطع المكافئ)

القطع المكافئ هو الرسم البياني للدالة التي تمثل معادلة من الدرجة الثانية التي تأخذ الصورة : $y_i = a + bx + cx^2 + \varepsilon$

الشكل العام للقطـــع المكافئ هو منحنى ذو طرفين متماثلين حول محورهم. للقطع المكافئ رأس أو نهاية واحدة (صغرى عندما $f''_x > 0$ ، وكبرى عندما $f''_x < 0$).

المنحنى العام لهذه الدالة يأخذ على المحاور الإحداثية شكل الخط المتصل أو المتقطع كالتالي:





علما بأن هذا المنحنى يمكن أن ينحرف في أي مكان في المستوي ويمكن إزاحته أو نقله وذلك حسب قيم (c,b,a). حتى نعين قيم الثوابت(c,b,a) ننطلق من شرط المربعات الصغرى$S = \Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = min$.

لذلك نشكل الدالة(S(a,b وتشتقها جزئيا بالنسبة لكل من(a,b,c). نضع هذه المشتقات الجزئية مساوية للصفر ونستخرج المعادلات اللازمة لحساب قيم الثوابت(c,b,a) . بناءا على ذلك فإن شرط مجموع مربعات الفروقات الصغرى المذكور أعلاه يأخذ الشكل التالي:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2 = min .$$

نحسب مشتق(S(a,b,c الجزئي بالنسبة لـــ (a) ونضعه مساويا للصفر فنجد:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \Sigma 2(y_i - a - bx_i - cx_i^2)(-1) = 0$$

بضرب الطرفين في($-\frac{1}{2}$)نحصل على المعادلة الطبيعية الأولى:

$$\mathbf{n.a + b.\Sigma x_i + c.\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i}$$

نشتق(S)بالنسبة لـb أيضا:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \Sigma 2(y_i - a - bx_i - cx_i^2)(-x_i^2) = 0$$

بضرب الطرفين في($-\frac{1}{2}$) نحصل على المعادلة الطبيعية الثانية:

$$a\Sigma x_i + b\Sigma x_i^2 + c\Sigma x_i^3 = \Sigma(x_i.y_i)$$

ونشتق أيضا بالنسبة لـــ (c) :

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \Sigma 2(y_i - a - b.x_i - c.\Sigma x_i^2)(-x_i^2) = 0$$

فتعطينا المعادلة الطبيعية الثالثة: $a.\Sigma x_i^2 + b.\Sigma x_i^3 + c\Sigma x_i^4 = \Sigma(x_i^2.y_i)$

وبذلك نكون قد حصلنا على ثلاث معادلات خطية في (a,b,c) كالتالي:

$$\begin{cases} na + b.\Sigma x_i + c.\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i \\ a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 + c.\Sigma x_i^3 = \Sigma(x_i.y_i) \\ a.\Sigma x_i^2 + b.\Sigma x_i^3 + c.\Sigma x_i^4 = \Sigma(x_i^2.y_i) \end{cases}$$

لقد رأينا سابقا أن مثل هذه المعادلات هي علاقات رياضية، المجهول فيها هي قيم (a,b,c) أما قيمx, y فهي قيم معلومة لـــ(y_i ,x_i) . إن كل هذه المعادلات تتضمن الثوابت المجهولة (a,b,c). بحل هذه المعادلات نحدد قيم كل من (a,b,c) التي توافق النهاية الصغرى ل- S(a,b,c) ، أي الموافقة لوضعية ما لمنحنى القطع المكافئ والتي تجعله يمثل العلاقة القياسية المفروضة أفضل تمثيل. عندها نضع في مكان(a,b,c) في معادلة المنحنى المقترح $(y = a + bx_i + cx_i^2)$ هذه القيم الناتجة فنحصل على معادلة منحنى قطع مكافئ معلوم . لحل المعادلات الخطية السابقة نستخدم طريقة المحددات.

إذا رمزنا لـــ

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} \Sigma y_i & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i . y_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 . y_i & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} n & \Sigma y_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i . y_i & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^2 . y_i & \Sigma x_i^4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_c = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i . y_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 . y_i \end{vmatrix}$$

فإن:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad ; \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} \quad ; \quad c = \frac{\Delta_c}{\Delta}$$

بحيث أن : $\Delta \neq 0$

بعد ذلك تأخذ المعادلة المطلوبة و التي تمثل علاقة الانحدار المفروضة الشكل التالي :

$$\hat{y}_i = \frac{\Delta_a}{\Delta} + \frac{\Delta_b}{\Delta} . x_i + \frac{\Delta_c}{\Delta} . x_i^2$$

وهكذا نكون قد حصلنا على معادلة من الدرجة الثانية لتمثيل العلاقة القياسية المفروضة بين المؤشرين(x, y)، وأن ثوابتها (a, b, c) تحقق شرط المربعات الصغرى المشار إليها سابقا.

لكن لابد لنا من الإشارة مرة أخرى إلى أن هذه المعادلة التي حصلنا عليها هي أفضل معادلات الدرجة الثانية على الإطلاق لتمثيل العلاقة القياسية المفروضة ولكن هذا لا يعني أبدا أنها أفضل المعادلات الجبرية لتمثيل هذه العلاقة. ربما تكون من بين المعادلات الجبرية الأخرى: معادلة مستقيم، معادلة قطع زائد، معادلة أسية ......إلخ (معادلة منحنى غير القطع المكافئ)، معادلة ما تمثل هذه العلاقة القياسية تمثيلا أفضل منها. أي أنها تجعل قيمة المقدار(S(a,b,c أصغر منهافي حالة التمثيل بواسطة معادلة القطع المكافئ.

F – التمثيل بواسطة معادلة من الدرجة الثالثة :

معادلة الدرجة الثالثة تأخذ الشكل العام التالي:

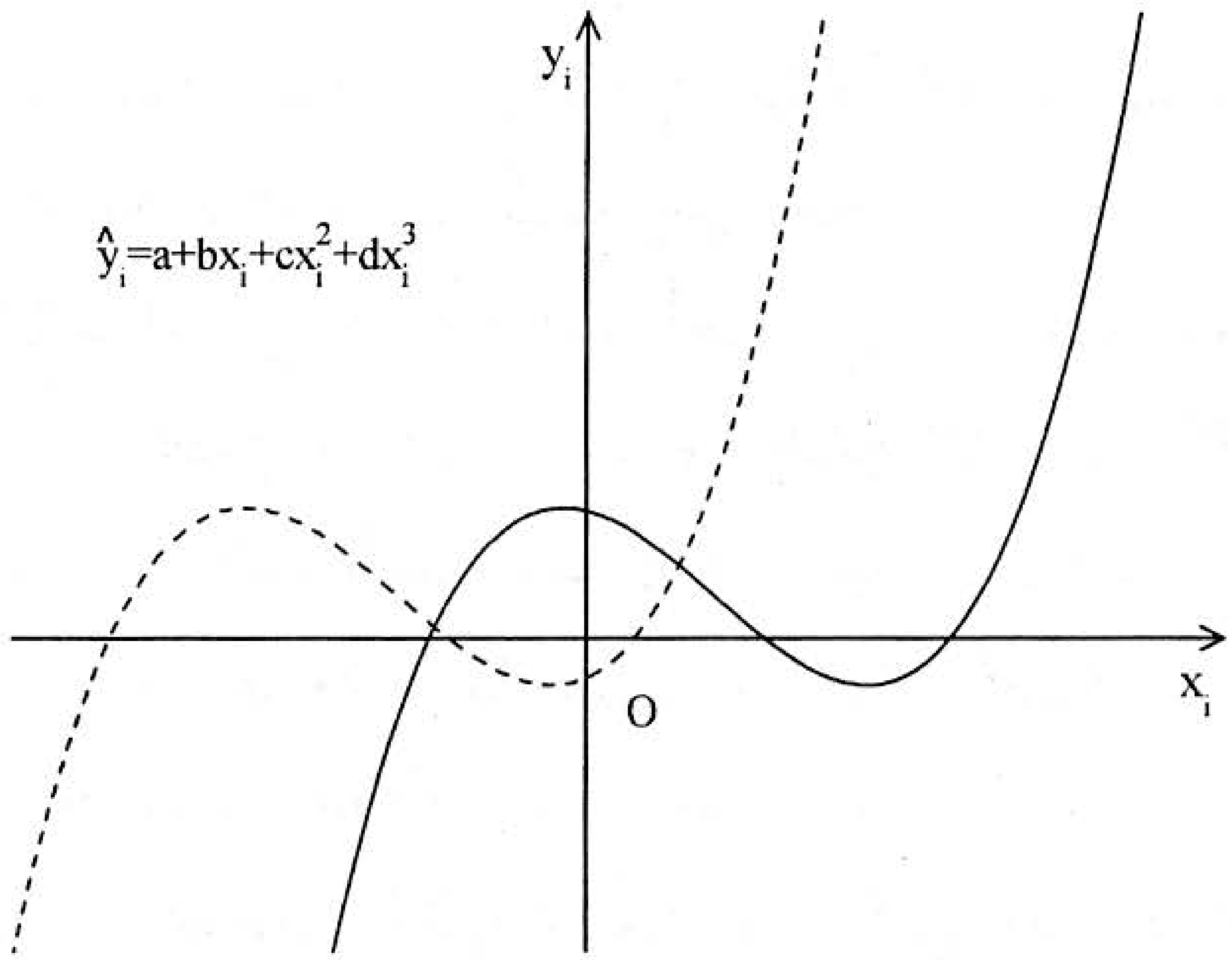
$$y_i = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$$

أما المنحنى الذي ترسمه على المحاور الإحداثية فيتميز بوجود تعرجات ذات قيمتين صغرى و عظمى أو أنه يمكن إيجاد مستقيم ما في المستوي يقطعه بثلاث نقاط على الأكثر وهو يأخذ الشكل أدناه.

إن هذا المنحنى يمكن نقله كيف ما نشاء وذلك حسب الثوابت (a,b,c,d). لحساب قيم الثوابت (a,b,c,d) المناسبة والتي تجعل الشرط S(a,b,c,d) = min ، نتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في حالة معادلة الدرجة الثانية فنجد أن:

$$S(a,b,c,d) = \Sigma(y - a - bx - cx^2 - dx^3) = min$$

نشتق الدالة S(a,b,c,d) بالنسبة لكل الثوابت (d,c,b,a) ونضع كلا



من هذه المشتقات مساويا للصفر ومن ثم نجري بعض الاختصارات اللازمة فنحصل على المعادلات التالية على الترتيب :

$$\begin{cases} n.a + b.\Sigma x_i + c.\Sigma x_i^2 + d.\Sigma x_i^3 = \Sigma y_i \\ a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 + c.\Sigma x_i^3 + d.\Sigma x_i^4 = \Sigma(x_i.y_i) \\ a.\Sigma x_i^2 + b.\Sigma x_i^3 + c.\Sigma x_i^4 + d.\Sigma x_i^5 = \Sigma(x_i^2.y_i) \\ a.\Sigma x_i^3 + b.\Sigma x_i^4 + c.\Sigma x_i^5 + d.\Sigma x_i^6 = \Sigma(x_i^3.y_i) \end{cases}$$

إن مجموع المعادلات السابقة هي معادلات خطية بالنسبة للثوابت (a,b,c,d) ،وبحلها عن طريق المحددات السابقة الذكر، نحصل على قيم كل من هذه الثوابت التي تجعل الشرط $s(a,b,c,d) = \min$ أصغر ما يمكن، وبذلك نحصل على معادلة من الشكل:

$$\hat{y}_i = \frac{\Delta_a}{\Delta} + \frac{\Delta_b}{\Delta}.x_i + \frac{\Delta_c}{\Delta}.x_i^2 + \frac{\Delta_d}{\Delta}.x_i^3$$

حيث$(\Delta_d , \Delta_c , \Delta_b , \Delta_a , \Delta)$ هي المحددات المناسبة المحسوبة باستعمال العلاقات الأربع السابقة. نشير هنا أيضا، كما أشرنا بالنسبة لمعادلة الدرجة الثانية، بأن هذه المعادلة هي أفضل من جميع معادلات الدرجة

الثالثة الأخرى لتمثيل العلاقة الانحدارية المفروضة ولكنها ليست أفضل معادلة جبرية.

بعد هذا العرض يمكننا أن نعمم هذه النتائج ونبحث عن تمثيل للعلاقة الانحدارية بواسطة كثير حدود من الدرجة (n) والذي يأخذ الشكل التالي:

$$\hat{y} = a + bx_i + cx_i^2 + \ldots\ldots + rx_i^n$$

إن معالجة هذه المعادلة لا يختلف كثيرا من حيث المبدأ عن طريقة معالجة معادلات الدرجة الأولى، الثانية و الثالثة، حيث أنه إذا اتبعنا نفس الأسلوب يمكننا أن نحصل على مجموعة من المعادلات العادية تكون خطية بالنسبة لكل من الثوابت(a,b,c,d). بحلها نحصل على قيمة كل من الثوابت التي تحقق بمجموعها الشرط:

$$[\ S(a, \ldots\ldots, r) \longrightarrow \min\ ]$$

I–1- 3-تقييم نموذج الانحدار البسيط:

قبل استخدام النموذج القياسي المقدر يجب التأكد من جودة الأداء العام لهذا النموذج أي يجب تحليل معادلة التمثيل المقترحة وتقييم مدى الدقة التي تمثل فيها هذه المعادلة العلاقة المفروضة بين المؤشرين (x, y).

لكن قبل إجراء هذا التحليل وتقييم نوعية تمثيل نموذج الانحدار للعلاقة التي تربط بين الظاهرة المدروسة والعوامل المسببة لها يجب أولا دراسة وقياس درجة العلاقة الارتباطية بينهما.

دراسة العلاقة الارتباطية :

إن دراسة نوع و متانة العلاقة الارتباطية بين (x, y) يتمثل فيما يلي:

- تحليل الظاهرة المدروسة و البحث عن الأسباب التي تؤدي إلى حدوثها وتغيرها باستمرار.

- تحديد العلاقة المتينة بين الظاهرة الناتجة و العوامل المسببة لها بكل وسائل التحليل والبحث .

- قياس شكل تلك العلاقة والتأكد من متانتها وذلك ابتداءا من قياس الظاهرة المدروسة والعوامل المسببة لها بوحدات قياس كمية محددة.

- البحث عن العلاقة بين الظاهرة المدروسة وأسبابها، يجب كذلك أن تتصف بالموضوعية التامة، بحيث يكون الباحث مقتنع بأن هناك علاقة شرطية واضحة بينهم.

- الكشف عن هذه العلاقة الارتباطية و قياس درجة متانتها باستعمال طرق مختلفة من أهمها معامل الارتباط البسيط (معامل بيرسون person). يستعمل عادة معامل الارتباط الخطي البسيط (r_{xy}) في قياس قوة و متانة العلاقة الارتباطية الخطية بين الظاهرتين المدروستين (x, y) كالتالي:

$$r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{n.\sigma_x.\sigma_y}$$

أو

$$r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\Sigma(x - \bar{x})^2\right].\left[\Sigma(y - \bar{y})^2\right]}}$$

حيث : σ_x , σ_y هي الانحراف المعياري لكل من x , y .

r_{xy} : يأخذ قيما في المجال بين $[-1\,,1]$

إن هذا المعامل يعطينا بالخصوص فكرة عن العلاقة الارتباطية بين (x, y) فيما إذا كانت عكسية أم طردية، قوية أم ضعيفة. نستطيع التعبير عن ذلك كالتالي:

عندما يكون $r_{xy} = +1$ فالعلاقة الارتباطية بين (x, y) تكون طردية قوية أي متينة جدا.

في حالة ما إذا كان $r_{xy}= -1$ عندئذ تكون العلاقة الارتباطية أيضا قوية و لكنها عكسية.

عندما $r_{xy}= 0$ فالعلاقة بين(x, y) تكون معدومة.

كلما كانت قيمة r_{xy} محصورة بين$[-1,0]$و $[0,+1]$ فالعلاقة الارتباطية يمكن أن تكون متينة جدا، متينة فقط، مقبولة،أو حتى ضعيفة.

هناك صيغ أخرى لمعامل الارتباط الخطي البسيط (r_{xy}) تستعمل عادة في التطبيقات العملية. إذا أجرينا بعض التحويرات على العبارة السابقة فنحصل على ما يلي:

$$r_{xy} = \frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})\,.\,(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2\right].\left[\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2\right]}}$$

بالنسبة للبسط :

$$\begin{aligned}\Sigma(x_i-\bar{x})\,.(y_i-\bar{y}) &= \Sigma(x_i.y_i - x_i.\bar{y} - \bar{x}\,.\,y_i + \bar{x}\,\bar{y})\\ &= \Sigma(x_i\,.y_i) - \bar{y}.\Sigma\,x_i - \bar{x}.\Sigma\,y_i + n.\bar{x}\,.\bar{y}\end{aligned}$$

بوضع :

$$\frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{x} \longrightarrow \Sigma x_i = n.\,\bar{x}$$

$$\frac{\Sigma y_i}{n} = \bar{y} \longrightarrow \Sigma y_i = n.\,\bar{y}$$

نحصل على:

$$\begin{aligned}&= \Sigma(y_i.x_i) - \bar{y}.(\,n.\,\bar{x}\,) - \bar{x}\,(n.\bar{y}) + n\,(\bar{y}.\bar{x})\\ &= \Sigma(x_i.y_i) - n\,\bar{x}\,.\bar{y} = \Sigma\,(x_i.y_i) - n.\,\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)\left(\frac{\Sigma y_i}{n}\right)\\ &= \frac{n\,.\,\Sigma(x_i\,.\,y_i) - (\Sigma x_i)\,.\,(\Sigma y_i)}{n}\end{aligned}$$

بالنسبة للمقام :

$$\Sigma(x_i-\bar{x})^2 = \Sigma \left[x_i^2 - 2x_i . \bar{x} + \bar{x}^2 \right]$$
$$= \Sigma x_i^2 - 2\bar{x} . \Sigma x_i + n. \bar{x}^2$$
$$= \Sigma x_i^2 - 2\bar{x}\ (n. \bar{x}) + n. \bar{x}^2$$
$$= \Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2$$
$$= \Sigma x_i^2 - n \left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^2$$
$$= \frac{n . \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}{n}$$

بنفس الطريقة نحصل على الشق الثاني من المقام :

$$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = \frac{n . \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2}{n}$$

بتعويض هذه المقادير في العلاقة السابقة نحصل على العلاقة التالية :

$$r_{xy} = \frac{n.\Sigma(y_i . x_i) - (\Sigma y_i) . (\Sigma x_i)}{\sqrt{\left[n.\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2\right] . \left[n.\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2\right]}}$$

نستطيع أيضا أن نستخرج علاقة أخرى لحساب معامل الارتباط الخطي البسيط انطلاقا من العلاقة الأولى المعطاة أعلاه كالتالي :

$$r_{xy} = \frac{\overline{x.y} - \bar{y}. \bar{x}}{\sigma_x . \sigma_y} \quad \text{أو} \quad r_{xy} = b\ \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

معامل الارتباط البسيط غير الخطي :

في حالة نموذج الانحدار البسيط غير الخطي (المعادلة الاسية ،الصماء ، التربيعية ، ... الخ) يفضل في مثل هذه الحالة استخدام معامل الارتباط البيرسوني ولكن بحدود أخرى كالتالي :

$$\rho_{xy}=\frac{n.\Sigma(y_i.\hat{y}_i) - (\Sigma y_i).(\Sigma\hat{y}_i)}{\sqrt{\left[n.\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i^2)^2\right].\left[n.\Sigma\hat{y}_i^2 - (\Sigma\hat{y}_i)^2\right]}}$$

هذه العبارة هي عبارة عن معامل الارتباط لبيرسون ولكن بين المؤشرين $(\hat{y}_i,y_i)$ عوض العلاقة بين(x_i,y_i). لتبسيط الحساب نستعمل صيغة أخرى لحساب هذا المعامل كالتالي:

$$\rho_{xy}=\sqrt{1-\frac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$

تقييم نتائج تقدير نموذج الانحدار المقترح :

أولا: تقييم معادلة الانحدار المقترحة:

من أجل دراسة جودة و فعالية تمثيل معادلة الانحدار المقترحة للعلاقة بين (x, y) نجري ما يسمى باختبار المعنوية الإحصائية. وظيفة هذا الاختبار هي التأكد من أن نموذج الانحدار المقترح يعبر بصفة جيدة وفعالة عن نوعية العلاقة بين (x, y) ، يتكون هذا الاختبار من عدة مقاييس :

1- معامل التحديد البسيط: $(R)^2$:

إن تحليل التشتت يسمح بتحليل تشتت المتغير التابع (y) من خلال تحليل تباين هذا المتغير: $\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}=\frac{\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{n}+\frac{\Sigma(\hat{y}-y_i)^2}{n}$

حيث :

$\sigma_y^2=\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n}$ - هو التباين الكلي للمؤشر التابع.

$\sigma^2_{\hat{y}}=\frac{\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{n}$: تباين القيم التقديرية، المحصل عليها بواسطة النموذج المقترح، عن الوسط الحسابي الفعلي$(\bar{y})$.

$$\sigma^2_{y\hat{y}} = \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$$: تباين التمثيل و يعبر عن تباين القيم التقديرية($\hat{y}_i$) عن القيم الفعلية (y_i).

هذا يعني أن $\sigma^2_{\hat{y}}$, $\sigma^2_{\hat{y}y}$ يعتبران جزءان أساسيان من التباين الكلي σ^2_y.

إن نسبة التشتت، الناتجة عن نموذج الانحدار، من مجموع تشتت المتغير التابع(y) يعبر عنها معامل التحديد البسيط (R^2)كالتالي :

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\Sigma(y - \bar{y})^2}$$

معامل التحديد البسيط الخطي هو أيضا عبارة عن مربع معامل الارتباط البسيط الخطي. أي:

$$. R^2 = r^2 = \left(b.\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2 = b^2.\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$$

أما معامل التحديد في الحالات غير الخطية فهو يساوي مربع معامل الارتباط البسيط غير الخطي. أي:

$$.R^2 = \rho^2 = \left(\sqrt{1-\frac{\Sigma(\hat{y}_i - y_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}}\right)^2 = 1-\frac{\Sigma(\hat{y}_i - y_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

مجال تعيين معامل التحديد هو [1+ ، 0] .

إن العلاقة السابقة لحساب معامل التحديد تعطي فكرة واضحة عن مقدار تأثير المؤشر(x) على المؤشر (y) مقارنة بالعوامل الأخرى المؤثرة في (y) أيضا وذلك من خلال النموذج الرياضي المختار للتعبير عن علاقة (x) بـــ (y) .

كلما كانت قيمة R^2 قريبة من"1 " كلما كانت العلاقة بين(x, y) متينة وقوية والنموذج الرياضي المقترح واقعي وصحيح: فإذا كان ($R^2 = 1$)فهذا يعني أن $\sigma_{\hat{y}}^2 = \sigma_y^2$. أي أن تباين القيم الفعلية عن الوسط الحسابي هو نفسه تباين القيم التقديرية عن نفس الوسط الحسابي. هذا يعني أن القيم التقديرية هي نفسها القيم الفعلية. في هذه الحالة النموذج المختار يعطي تطابقا تاما بين قيم (y_i) الفعلية وقيمها التقديرية، وهذا يعني أن معادلة التمثيل مختارة بشكل صحيح تماما، و أنه لا يؤثر على المتغير الناتج (y) أي متغير آخر مستقل غير المتغير(x). للتأكيد على هذا يجب أن نجد أن: $\sigma^2_{y\hat{y}} = 0$ أيضا. أي أن انحراف القيم التقديرية عن الفعلية يساوي الصفر. بعبارة أخرى يجب أن تكون المقادير $(\hat{y}_i - y_i)^2 = 0$ وبالتالي تكون $y_i = \hat{y}_i$.

أما إذا كان $R^2 = 0$ فإن هذا يعني أن $\sigma^2_{\hat{y}} = 0$. في هذه الحالة تكون جميع المقادير $(\hat{y} - \bar{y})^2 = 0$ وهذا يعني أن $\hat{y} = \bar{y}$. أي أن جميع القيم التقديرية لـ(y) متساوية وتساوي عددا ثابتا ($\bar{y}$) وهو الوسط الحسابي. إن هذا يؤكد أن النموذج المقترح لتمثيل العلاقة(x, y) هو معادلة مستقيم مواز لـــمحور(x) وله الشكل التالي: $\hat{y}_i = \bar{y} = a$. بما أن هذه المعادلة لا تتضمن قيم(x)، فنستنتج أنه عندما يتغير(x) فإن قيم(y) التقديرية لا تتأثر بذلك التغير مما يؤكد أن(y) غير مرتبط بـــ(x) نهائيا. بعبارة أخرى كل التغيرات التي تحدث في(y) هي بفعل عوامل أخرى غير (x) . بصفة عامة إذا كان معامل التحديد البسيط (R^2) ضعيفا فإن ذلك يكون ناتجا عن أن النموذج الرياضي المختار لا يمثل الظاهرة المدروسة تمثيلا جيدا. قد يكون ذلك بسبب أن العوامل

المستقلة (x_i) ا لمختارة في النموذج تؤثر تأثيرا ضعيفا على(y_i) و أن هناك عوامل أخرى، لم تؤخذ بعين الاعتبار، هي التي تؤثر تأثيرا كبيرا على(y). قد يكون ضعف قيمة معامل التحديد البسيط ناتجة أيضا عن أخطاء في القياس أو في جمع المعطيات و إعدادها.

2- متوسط خطأ التقريب $\bar{A}$:

إن جودة النموذج المقترح لتمثيل العلاقة المدروسة تقاس أيضا بواسطة متوسط خطأ التقريب. هذا المقياس هو عبارة عن متوسط انحراف القيم المقدرة عن القيم الفعلية :

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\Sigma\left(\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|.100 \right)$$

إن الحد المقبول لتغير قيم($\overline{A}$) هو % 8-10 ليس أكثر.

3- متوسط معامل المرونة ($\overline{E}$) :

هذا المقياس يوضح ما هي النسبة المتوسطة التي يتغير أو ينحرف بها الناتج (y) عن قيمته المتوسطة إذا تغير العامل المستقل أو المؤثر(x_i) عن قيمته المتوسطة بـــ1 %. يحسب هذا المعامل من العلاقة:

$$\bar{E} = f'(x).\ \frac{\overline{x}}{\overline{y}}.$$

4 - اختبار (أو مقياس) فيشر (F-test) :

يستخدم هذا المقياس مثل المقاييس السابقة في تقييم جودة تمثيل معادلة الانحدار المقترحة و اختبار موضوعية معامل التحديد. يتمثل ذلك في اختبار الفرضية الصفرية(H_0) لمقياس فيشر حول المعنوية الإحصائية لمعادلة النموذج المقترح ومدى موضوعية قيمة معامل التحديد المحصل عليها (فرضية أن يكون F=1).من أجل ذلك نقوم بمقارنة القيمة

الفعلية($F_{réel}$) والقيمة الحرجة أو الجدولية (F_{tab}) المستخرجة من جدول إحصائية فيشر. قيمة ($F_{réel}$) الفعلية تستخرج من العبارة التالية محسوبة لدرجة واحدة من الحرية:

$$F_{réel} = \frac{\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2 / m}{\Sigma(y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)} = \frac{R^2_{xy}}{1 - R^2} \times \frac{n - m - 1}{m}$$

$$F_{réel} = \frac{R^2.(n - m - 1)}{(1 - R^2).m}$$

حيث أن :

m : عدد المتغيرات المستقلة .

n : عدد المشاهدات (عدد عناصر العينة المدروسة).

R^2 : معامل التحديد.

نضع: $V_1 = m$

و :$V_2 = n\text{-}m\text{-}1$

يمكن الحصول على قيمة (F_{tab}) الجدولية بالبحث في جدول(F) الإحصائي(جدول فيشر) المقابلة لدرجات حرية عددها $v_1 = m$ بالنسبة للبسط (أفقيا على الجدول) ودرجات حرية مقدارها $v_2 = n\text{-} m\text{-}1$ بالنسبة للمقام(عموديا على الجدول)، ومستوى معنوية معين (عادة ما يؤخذ مستوى المعنوية α=0,05).

القيمة الجدولية(F_{tab}) لمقياس فيشر تسمى القيمة الحرجة لـــ(F). إذا كانت قيمة($F_{réel}$) المحسوبة أكبر من قيمة (F_{tab}) المستخرجة من الجدول فيتم رفض الفرضية الصفرية(H_0) المفترضة للطبيعة العشوائية لمعادلة التمثيل المقترحة(F في هذه الحالة تكون أكبر من الواحد).

بعبارة أخرى إذا كان ($F_{réel} > F_{tab}$) هذا يؤكد أن معادلة التمثيل جيدة و قيمة معامل التحديد (R^2) التي حصلنا عليها هي قيمة موضوعية تختلف عن الصفر وتصلح لاستخدامها كمقياس لتقدير فعالية و جودة التمثيل. كما أن احتمال أن يكون هناك خطأ في رفض الفرضية الصفرية لمقياس F لا تتعدى 5% وهي نسبة تعتبر ضعيفة. إذا كان ($F_{réel} < F_{tab}$) فإن احتمال الخطأ في رفض الفرضية H_0 يكون أكبر من 5% . لذلك يتم قبول اختبار(H_0) المفترض للطبيعة العشوائية لمعاملات نموذج الانحدار المقترح. أي أن معادلة الانحدار المقترحة غير معنوية إحصائيا ولا تصلح لتفسير سلوك المتغير التابع. لذلك نضطر للبحث عن معادلة أخرى لتمثيل العلاقة بين(x, y) أو نلجأ إلى زيادة عدد كل من قيم (x, y) في سلسلة البيانات (زيادة حجم العينة) ، إدخال متغيرات مستقلة جديدة أو الإبقاء على المعادلة الانحدارية المقترحة ولكن يجب تغيير صيغتها الرياضية أو غيرها.

ثانيا : تقييم معاملات الانحدار المقدرة (b, a) :

من أجل تقييم الأهمية الإحصائية لتكوين معاملات معادلة الانحدار المقترحة يتم حساب مقياس(t) لستيودنت لهذه المعاملات ومجال ثقة كل واحد منهم . يسمح حساب مقياس(t) من اختبار الفرضية (H_0) حول الطبيعة العشوائية أو الموضوعية لتكوين معاملات معادلة الانحدار. إن إجراء هذا الاختبار يتم بمقارنة القيمة الفعلية أو المحسوبة) ($t_{réel}$ لستيودنت بقيمته الجدولية (t_{tab}) المستخرجة من جدول التوزيع لستيودنت. نحسب($t_{réel}$) من العبارة التالية :

بالنسبة للمعامل (a) :

$$t_a = \frac{a}{\sqrt{\frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{n-m-1} \times \frac{\Sigma x^2}{n.\Sigma(x-\bar{x})^2}}} = \frac{a}{S.E_a} = \frac{a}{\sqrt{VAR_a}} = \frac{a}{m_a}$$

بالنسبة للمعامل (b) :

$$t_b = \frac{b}{\sqrt{\frac{\Sigma(y-\hat{y})^2/(n-m-1)}{\Sigma(x-\bar{x})^2}}} = \frac{b}{\sqrt{VAR_b}} = \frac{b}{S.E_b} = \frac{b}{m_b}$$

حيث أن: m_b , m_a هي قيم الخطأ المعياري لهذه المعاملات ويرمز لها أيضا ب: $S.E_a$, $S.E_b$. بمقارنة القيمة الفعلية (المحسوبة) بالقيمة الحرجة (الجدولية) لمقياس(t) يمكننا قبول فرضية(H_o) أو رفضها. إذا كانت($t_{réel} > t_{tab}$)، فإنه يتم رفض(H_o)، بمعنى ($b\neq0,a\neq0$) وأن طابع تكوينهما غير عشوائي و أنهما تكونتا تحت تأثير المؤشر المستقل (x). هذا يعني أن المتغير (x) له دور كبير في تفسير التغيرات التي تحدث في المتغير(y). أما إذا كانت ($t_{réel} < t_{tab}$)، فإنه يتم قبول فرضية (H_o)التي تؤكد عدم المعنوية الإحصائية لمعاملات الانحدار ($b= 0,a =0$) والطابع العشوائي لتكوينها وأنه لا تأثير للمتغير (x)في تكوينها.

إن القيمة الجدولية (t_{tab}) لمقياس(t) نحصل عليها بالبحث في جدول التوزيع الإحصائي لستيودنت عند درجة حرية مقدارها $V_2 =(n-m-1)$ (بالانتقال عموديا في الجدول) ومستوى معنوية $\alpha=0,05$ أو $\alpha=0,01$. في حالة ما إذا كانت معاملات الانحدار سالبة فإنه يتم مقارنة القيمة المطلقة $t_{réel}$ ب t_{tab}.

العلاقة بين مقياس فيشر (F) ومقياس ستيودنت (t) يعبر عنها كالتالي:

$$t_r = t_b = \sqrt{F}$$

ثالثا : تقييم الأداء العام لنموذج الانحدار المقدر :

إن تقييم الأداء العام لنموذج الانحدار المقترح يعنى اختبار قدرة هذا النموذج على إجراء توقعات لقيمة الظاهرة المدروسة (y) في المستقبل، أي عندما نعطي لـــ(x) قيم خارج قيم سلسلة البيانات المعطاة. يتم إجراء هذا التقييم باستعمال عدة اختبارات من أهمها حساب معامل عدم التساوي(U) لـ(Theil) .

يحسب هذا المعامل حسب الصيغة التالية :

$$U = \frac{\sqrt{\dfrac{\Sigma(\hat{y}_i - y_i)^2}{n}}}{\sqrt{\dfrac{(\Sigma\hat{y}_i)^2}{n}} + \sqrt{\dfrac{(\Sigma y_i)^2}{n}}}$$

حيث :

n : عدد قيم المشاهدات .

$\hat{y}_i$: القيم التقديرية للظاهرة.

y_i : القيم الفعلية للظاهرة.

مجال تغير(U) هو [1 ، 0]. كلما كانت قيم(U) قريبة من الصفر كلما كانت قدرة النموذج على التوقع جيدة والعكس عندما تقترب (U) من الواحد.

I ــ1 - 4 استخدامات نموذج الانحدار المقدر:

عندما نقوم بتمثيل أو التعبير عن علاقة ما بين ظاهرتين أو أكثر بواسطة علاقة رياضية فإننا نكون بذلك قد وضعنا نموذجا محددا لتلك العلاقة. نستطيع أن نستخدم هذا النموذج في كثير من التطبيقات منها :

- *إجراء التوقع و الاستطلاع :*

إذا كانت لدينا قيمة ما للمتغير المستقل (x) ولتكن (x_p)، غير واردة من بين قيم (x) الموجودة في سلسلة العينة التي اعتمدناها سابقا في دراستنا للعلاقة بين(x, y)، فتصبح عملية البحث عن قيم(y) التي نرمز لها بالرمز $(\hat{y}_p)$ المقابلة لـــ (x_p) هي عملية استطلاع. فالاستطلاع إذن هو عملية البحث عن قيم (y) المجهولة والتي تقابل قيم لـــ(x) معلومة أو معطاة. بهذا المعنى يختلف الاستطلاع عن التوقع الذي يهتم بالبحث عن قيم المتغير(y) التابع للزمن (t) في فترة زمنية معطاة. بينما الاستطلاع يبحث عن قيم مؤشر ما (y) تابع لمؤشر آخر مستقل (x) حيث(x) هي ظاهرة ما وليست فترات زمنية. إن عملية الاستطلاع تصبح سهلة بعدما نكون قد حددنا الصيغة الرياضية (نموذج الانحدار) المثلة للعلاقة المدروسة. حيث أننا نعوض قيمة(x_p) في معادلة الانحدار المقترحة فنحصل على قيمة (y) النظرية وهي $(\hat{y}_p)$ المقابلة لـــ (x_p). في التطبيقات العملية لا يكفي معرفة القيمة المقدرة $(\hat{y}_p)$ الموافقة لقيمة (x_p) الغير موجودة في سلسلة المعطيات، إذا لم نعرف ما هي درجة ومجال الثقة اللذان نعطيهما لهذه القيمة المقدرة $(\hat{y}_p)$. بمعنى آخر لا نكتفي بحصولنا على القيمة التقديرية $(\hat{y}_p)$ المقابلة لـــ(x_p) والتي نحصل عليها بواسطة معادلة الانحدار بل يجب أن نستعمل هذه القيمة النظرية من أجل الحصول على معلومة أخرى أكثر واقعية وهي القيمة الفعلية (y_p) المقابلة ل (x_p). هذه القيمة الفعلية(y_p) لا نستطيع أن نحددها بدقة تامة وإنما نستطيع حصرها في مجال معين. هذا المجال يسمى بمجال الثقة الذي تقع بداخله القيمة الفعلية (y_p) المقابلة للقيمة المقدرة $(\hat{y}_p)$. في هذه الحالة تصبح مهمتنا هي البحث عن مجال

معين تتأرجح فيه قيمة (y_p) فوق أو تحت ($\hat{y}_p$)باحتمال كبير معلوم. من أجل تحديد مجال الثقة (مجال الاستطلاع) الذي تتراوح فيه القيمة الفعلية (y_p) يجب اتباع الخطوات التالية:

1 ـ تقييم الأداء العام لنموذج الانحدار المقترح باستخدام معامل عدم التساوي(U) أو غيره.

2 ـ إذا كان النموذج المقدر يتميز بأداء عام جيد، ننتقل إلى إجراء الاستطلاع بتقدير قيمة($\hat{y}_p$) المقابلة لـــ (x_p).

3 ـ حساب متوسط الخطأ المعياري ($m_{\hat{y}p} = S.E_{\hat{y}p}$) للقيمة المقدرة ($\hat{y}_p$) كما يلي:

$$S.E_{\hat{y}p} = s_{y\hat{y}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\Sigma(x - \bar{x})^2}}$$

حيث :

$$s_{\hat{y}y} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}}$$

يستخرج مجال الاستطلاع الذي يمكن للقيمة الفعلية للمتغير التابع (y_p) أن تتراوح فيه كالتالي:

$$\hat{y}_p \pm (S.E_{\hat{y}p} \cdot t_{tab})$$

أي :

$$\hat{y}_p + S.E_{\hat{y}p} \cdot t_{tab} > y_p > \hat{y}_p - S.E_{\hat{y}p} \cdot t_{tab}$$

حيث أن :

$\hat{y}_p$: القيمة المقدرة لـــ (y) المقابلة لـــ : (x_p)

y_p: القيمة الفعلية لـــ (y) المقابلة لـــ :(x_p)

t_{tab}: قيمة مقياس التوزيع لستيودنت عند درجة حرية عددها $V_2 = n-m-1$ ، وعند مستوى معنوية مقداره $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,01$.

I - 2 - تطبيقات :

مثال-1

عدد العمال في كل ورشة من ورشات صناعة البلاط و متوسط الإنتاج اليومي فيها كان على الشكل التالي :

رقم الورشة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد العمال	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
متوسط الإنتاج اليومي	15	30	49	71	87	109	131	144	173	193

المطلوب :

1 ـــ تكوين وتقدير نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين المؤشرين المذكورين .

2 ـــ دراسة العلاقة الارتباطية بينهما

3 ـــ تقييم النموذج الانحداري المقدر .

4 ـــ تقدير الإنتاج المتوسط قي ورشة عدد عمالها 120 (حساب$\hat{y}_{120}$) ثم حساب قيمة الإنتاج المتوسط الفعلي (y_{120}) لهذه الورشة عند نفس مستوى عدد العمال بمدى ثقة قدره 0,96.

الحـــل :

1- تشكيل نموذج الانحدار :

من شكل انتشار أزواج القيم (x, y) نلاحظ أن الاتجاه العام يمثل علاقة مستقيمة (خطية) ، لذلك نعتمد في تمثيلها على المعادلة العامة للمستقيم: . $\hat{y}_i = a + bx_i$

2- دراسة العلاقة الارتباطية بين المؤشرين(x, y): نعرف أن عدد العمال يؤثر على متوسط الإنتاج، فالأول يؤثر على الثاني. من وجهة نظر اقتصادية عامة نعرف أن طبيعة العلاقة بينهما هي علاقة تتميز بأنها

طردية، فكمية الإنتاج المتوسط تتزايد بتزايد عدد العمال إلى حد ما. عندما نتفحص سلسلة المعطيات للمؤشرين تتأكد لنا هذه العلاقة وشكلها (علاقة طردية).

لقياس درجة متانة العلاقة الارتباطية بين هذين المؤشرين نحسب معامل الارتباط البسيط(r_{xy}) . حساب هذا المعامل يتطلب إعداد بعض القيم التي نوردها في الجدول التالي:

الرقم	y_i	x_i	y_ix_i	x_i^2	y_i^2	y_i	y_i-$\hat{y}_i$	A_i	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
1	15	5	75	25	225	19,2	- 4,2	28	17,64
2	30	10	300	100	900	29,2	0,8	2.67	0,64
3	49	20	980	400	2401	49,2	- 0,2	0,4	0,04
4	71	30	2130	900	5041	69,2	1,8	2,54	3.24
5	87	40	3480	1600	7569	89,2	-2,2	2,53	4.84
6	109	50	5450	2500	11881	109,2	- 0,2	0,18	0,04
7	131	60	7860	3600	17761	129,2	1,8	1,38	3,24
8	144	70	10080	4900	20736	149,2	-5,2	3,6	27,04
9	173	80	13840	6400	29929	169,2	3,8	2,2	14,44
10	193	90	17370	8100	37249	189,2	3,8	1,97	14,44
Σ	1002	455	61565	28525	133092	1002	00	45,47	85,6
متوسط القيم	100,2	45,5	6156,5	2852,5	13309,2	100,2	-	4,55	-
σ	57,18	27,97	-	-	-	-	-		
σ^2	3269,16	782,25	-	-	-	3129	-		

$$r_{xy} = \frac{\overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{6156,5 - 45,5 \times 100,2}{57,18 \times 27,97}$$

$$r_{xy} = \frac{1597,4}{1599,33} = 0,99$$

هذا يدل على أن هناك علاقة خطية طردية قوية بين المتغيرين محل الدراسة ، بمعنى أن الزيادة في عدد العمال تؤدي إلى الزيادة في متوسط الإنتاج.

3- تقدير نموذج الانحدار:

هذا يتمثل في تحديد الثوابت (المعاملات) الملائمة، التي تعطينا معادلة تمثيل العلاقة المذكورة أفضل تمثيل. من أجل هذا نطبق المعادلات المحصل عليها سابقا (المعادلات الطبيعية لطريقة المربعات الصغرى في حالة معادلة مستقيم) :

$$\begin{cases} n.a + b.\Sigma x_i = \Sigma y_i \\ a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 = \Sigma x_i.y_i \end{cases}$$

نستعمل أي من الصيغ التي تعرضنا إليها سابقا و المستخرجة من هذين المعادلتين لحساب معاملات معادلة الانحدار (b,a). نستعمل الصيغة التالية:

$$b = \frac{\overline{y.x} - \overline{x}.\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

إن المقادير اللازمة لحساب هذه الصيغة موجودة في الجدول الذي تم إعداده سابقا :

$$b = \frac{6156{,}5 - 45{,}5 \times 100{,}2}{2852{,}5 - 45{,}5^2} = \frac{1597{,}4}{782{,}25} = 2$$

$$a = \overline{y} - b.\overline{x} = 100{,}2 - 2 \,.\, 45{,}5 = 9{,}2$$

يكون النموذج التقديري للعلاقة السابقة هو : $\hat{y}_i = 9{,}2 + 2x_i$

هذا المستقيم هو الذي يعطينا أصغر قيمة للدالة S(a,b) عندما تكون معادلة الانحدار التمثيلية خطية. باستعمال هذه المعادلة نحسب قيم ($\hat{y}_i$) التقديرية ونرسم المستقيم الممثل لها بيانيا، فنحصل على منحنى القيم التقديرية.

4 - تقييم نموذج الانحدار المحصل عليه :

- حساب معامل التحديد البسيط (R^2) :

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}_i - \overline{y})^2}{\Sigma(y - \overline{y})^2} = \frac{31290}{32691,6} \approx 0,97$$

أو :
$$R^2 = (r_{xy})^2 = (0,99)^2 = 0,98$$

وهي قيم متقاربة (الفرق بينهما 0,01 ناتج عن تقريب الأرقام).

استنتاج :

إن قيمة ($R^2 = 0,98$) تدل على أن تمثيل العلاقة بين (x, y) بواسطة المعادلة الخطية المقترحة يعتبر ذو فعالية كبيرة (ذو جودة عالية)، وهذا يعني أيضا أن 98% من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع (y) سببها التغيرفي(x) . أي أن هناك تأثير كبير جدا لزيادة عدد العمال على زيادة متوسط الإنتاج.

-حساب متوسط خطأ التقريب ($\overline{A}$) :

$$\overline{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i}{n} = \frac{1}{n}\Sigma\left(\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} \times 100\right) = \frac{1}{10}.(45,47) = 4,55\%$$

هذه النتيجة تعني أنه في المتوسط القيم التقديرية تنحرف عن القيم الفعلية بـــ 4,55% .

– اختبار فرضية Ho : حتى نتحقق من أن قيمة معامل التحديد البسيط (R^2) التي وجدناها سابقا هي قيمة موضوعية نستخدم مقياس فيشر(Fréel) لاختبار فرضية Ho حول الطبيعة العشوائية لمعادلة الانحدار ومعامل التحديد:

$$F_{réel} = \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,98}{1 - 0,98} \times \frac{10 - 1 - 1}{1} = 49 \times 8 = 392$$

ثم نستخرج قيمة (F_{tab}) من جدول التوزيع الإحصائي لفيشر المقابلة لدرجـــات حرية عـــددها $V_1 = m = 1$ (بالتنقل أفقيا على الجـــدول)

ودرجات حرية مقدارها $V_2 = n\text{-}m\text{-}1=8$ (بالتنقل عموديا على الجدول) ومستوى معنوية $\alpha = 0,05$. هذه القيمة (F_{tab}) هي القيمة الحرجة لـــ (F) : $F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1, v_2) = F_{(0,05)}(1 ; 8) = 5,32$

ما دام أن : $F_{réel} > F_{tab}$ $(392 > 5,32)$

فيجب رفض فرضية H_0 حول الطبيعة العشوائية لتكوين معادلة الانحدار المقترحة. إن هذه النتيجة لمقياس فيشر تؤكد أن معادلة التمثيل جيدة و أن قيمة معامل التحديد التي حصلنا عليها هي قيمة موضوعية وتصلح لاستخدامها كمقياس لتقدير فعالية تمثيل معادلة الانحدار للعلاقة المدروسة بين متوسط الإنتاج وعدد العمال في ورشة البلاط.

5 - إجراء عملية استطلاع عندما يكون عدد العمال = 120:

في هذه الخطوة نريد أن نقدر حجم الإنتاج المتوسط ($\hat{y}_{120}$) الذي تستطيع أن تحققه الورشة المعنية إذا كان عدد عمالها ($x_p=120$). نتبع لهذا الغرض الخطوات التالية:

- إجراء تقييم الأداء العام لنموذج الانحدار المقترح باستخدام معامل عدم التساوي(U) :

$$\frac{\Sigma(\hat{y}_i - y_i)^2}{n} = 8,56 \ ; \ \frac{(\Sigma\hat{y}_i)^2}{n} = \frac{(100,2)^2}{10} \ ; \ \frac{(\Sigma y_i)^2}{n} = \frac{(100,2)^2}{10}$$

$$U = \frac{\sqrt{8,56}}{\sqrt{100400,4} + \sqrt{100400,4}} = \frac{2,9}{633,72} = 0,0046$$

يمكن القول أن القدرة التوقعية لنموذج الانحدار المقترح جيدة جدا وذلك لأن معامل عدم التساوي(U) يقترب كثيرا من الصفر.

نعوض الآن قيمة (x_p=120) في معادلة الانحدار المقترحة

$\hat{y}_{120} = 9,2 + 2.120 = 249,2$ فنحصل على: $\hat{y}_i = 9,2 + 2x_i$

القيمة التقديرية لمتوسط الإنتاج للورشة المعنية عندما يكون عدد العمال = 120 هي $\hat{y}_{120} = 249,2$.

- ننتقل الآن حساب قيمة متوسط الإنتاج الفعلي (y_{120}) المقابلة لنفس المستوى من العمال x_p=120.

حساب متوسط الخطأ المعياري ($S.E_{\hat{y}p}$) للقيمة المقدرة وهي: $\hat{y}_{120} = 249,2$.

$$S.E_{\hat{y}p} = s_{\hat{y}y} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\Sigma(x - \bar{x})^2}} \;;$$

$$s_{\hat{y}y} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}} = \sqrt{\frac{85,6}{8}} = \sqrt{10,7} = 3,27$$

$$S.E_{\hat{y}p} = 3,27 \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(120 - 45,5)^2}{7822,5}} = 3,27 \cdot \sqrt{0,1 + \frac{5550,25}{7822,5}}$$

$$S.E_{\hat{y}p} = 3,27 \,.\, 0,9 = 2,94$$

مجال الاستطلاع (مجال الثقة) الذي يمكن للقيمة الفعلية لمتوسط الإنتاج(y_{120}) أن تتراوح فيه هو :

$$\hat{y}_{120} \pm \;[\,2,94 \,.\, t_{tab}\,]$$

حيث t_{tab} : قيمة مقياس التوزيع لستيودنت عند درجة حرية عددها $V_2 = (n - m - 1) = 8$ وعند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$.

من جدول توزيع ستيودنت نجد أن: $t_{tab} = 2,306$

إذن: $\hat{y}_{120} \pm [\,2,94 \,.\, 2,306\,] = 249,2 \pm 6,78$

وتكون y_{120} الفعلية محصورة في المجال : $242,4 < y_{120} < 255,98$
باحتمال كبير يقارب 0,95.

مثال- 2 :

لدينا 25 مؤسسة إنتاجية تمارس نشاطها في نفس القطاع. أثبتت الدراسة الإحصائية التي أجريت على مستوى هذه المؤسسات أن كمية الإنتاج السنوي وتكلفة الوحدة المنتجة من السلعة في كل منهم كانت كالتالي :

رقم المؤسسة	كمية الإنتاج السنوي بالألف طن	تكلفة الوحدة بالدينار	رقم المؤسسة	كمية الإنتاج السنوي الف طن	تكلفة الوحدة بالدينار
1	5	30	14	12	16
2	5,5	29	15	12,5	15
3	6	26	16	13	13
4	7	25	17	13,5	11
5	7	28	18	14	11
6	7,5	24	19	15	12
7	8	25	20	15,5	11
8	8	27	21	16	11
9	8,5	22	22	17	10
10	9	23	23	18	9
11	10	18	24	19	9
12	10,5	19	25	20	10
13	11,5	16			

المطلوب:

1- تكوين وتقدير نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين كمية الإنتاج وتكلفة الوحدة.

2- دراسة العلاقة الإرتباطية بينهما.

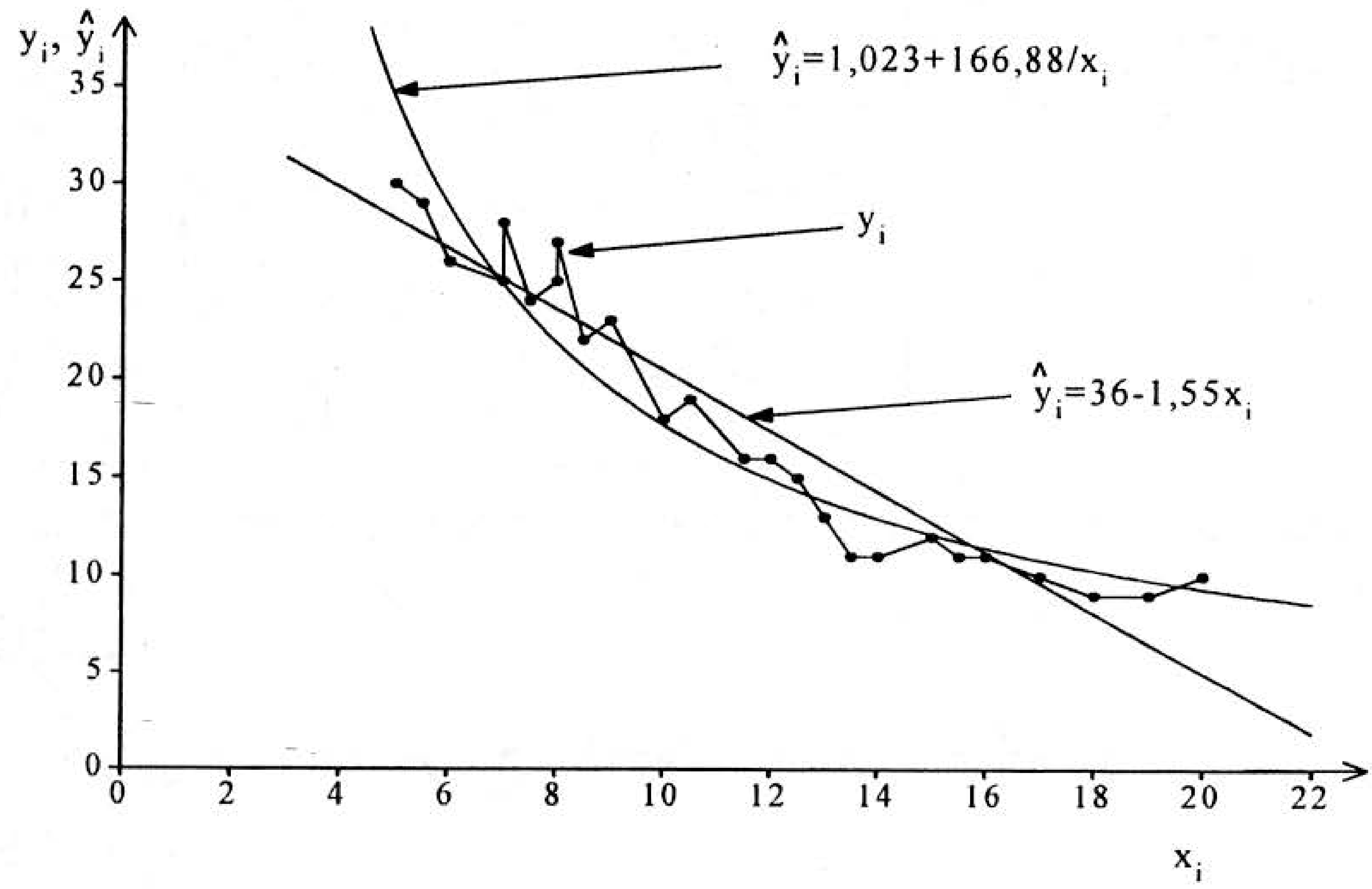
3- تقييم جودة تمثيل النموذج المقترح.

4- حساب تكلفة الوحدة من السلعة محل الدراسة عند مستوى إنتاج مؤسسة ما x_p=25 (أي حساب $\hat{y}_{25}$). ثم حساب قيمة تكلفة الوحدة الفعلية(y_{25}) عند نفس المستوى من الإنتاج بمدى ثقة يقابله احتمال ثقة قدره 0,95 . أجب على نفس السؤال عندما يكون مستوى الإنتاج ($x_p = 3$).

5- أجب على نفس الأسئلة السابقة في حالة ما إذا كان النموذج الممثل للعلاقة بين كمية الإنتاج وتكلفة الوحدة هو في شكل معادلة خط مستقيم. قارن بين جودة وفعالية تمثيل النموذجين للعلاقة المدروسة.

الحــــل:

1- تكوين نموذج الانحدار للعلاقة بين مستوى الإنتاج وتكلفة الوحدة:
نقوم برسم قيم الأزواج المرتبة (x_i ,y_i) المعطاة في السلسلة في المجال المحدد بين محوري قيم (y_i)، (x_i)فنحصل على الشكل التالي.



من شكل الانتشار هذا نلاحظ أن الاتجاه العام للعلاقة بين (x, y) يقترب كثيرا من منحنى قطع زائد شكله $\hat{y}_i = a + \frac{b}{x_i}$ أو من معادلة خط مستقيم من الشكل $\hat{y}_i = a + b.x_i$. نقوم أولا بدراسة الحالة الأولى.

2- تقدير معادلة القطع الزائد المقترحة:

لحساب معاملات معادلة الانحدار المقترحة نرجع معادلة التمثيل $\hat{y}_i = a+\frac{b}{x_i}$ إلى شكلها الخطي البسيط وذلك بوضع $z = \frac{1}{x_i}$ فيتحول شكلها إلى $\hat{y}_i = a + bz_i$ ، ثم نقوم بإعداد جدول القيم الذي يسمح بحساب المعاملات (b, a) (أنظر الجدول في الصفحة الموالية):

$$b = \frac{\overline{y.z} - \bar{z}.\bar{y}}{\overline{z^2} - \bar{z}^2} = \frac{2,1 - 0,1 \times 18}{0,012 - (0,1)^2} = \frac{0,3}{0,002} = 150$$

$$\bar{y} - b.\bar{z} \quad a == 18 - 150 \,.\, 0,1 = 3$$

وتكون معادلة القطع الزائد المقدرة هي:

$$\hat{y}_i = 3 + 150 \,.\frac{1}{x_i} \text{ أو } \hat{y}_i = 3 + 150.z_i$$

باستعمال هذه المعادلة نحسب قيم($\hat{y}_i$) التقديرية ونرسم المستقيم الممثل لها بيانيا.

3 – دراسة العلاقة الارتباطية بين (x, y):

من وجهة النظر الاقتصادية ندرك أن هناك علاقة بين تكلفة الوحدة وكمية الإنتاج. حيث نلاحظ أن حجم الإنتاج هو العامل المؤثر على تكلفة الوحدة، لذلك نرمز بـــ (x) لكمية الإنتاج ولتكلفة الوحدة بـــ (y).من أجل دراسة درجة متانة العلاقة الارتباطية ينهما نحسب معامل

i	z	y	y.z	z^2	y^2	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
1	0,2	30	6	0,04	900	33	-3	9
2	0,182	29	5,278	0,033	841	30,3	-1,3	1,69
3	0,176	26	4,342	0,028	676	28,05	-2,05	4,2
4	0,143	25	3,575	0,021	625	24,45	0,55	0,3
5	0,143	28	4	0,021	784	24,45	3,55	12,25
6	0,194	24	3,216	0,018	576	23,1	0,9	0,81
7	0,125	25	3,125	0,016	625	21,75	3,25	10,56
8	0,125	27	3,375	0,016	729	21,75	5,25	27,56
9	0,118	22	2,596	0,014	484	20,7	1,3	1,69
10	0,119	23	2,553	0,012	529	19,65	3,35	11,22
11	0,1	18	1,8	0,01	324	18	00	00
12	0,095	19	1,81	0,009	361	17,25	1,75	3,1
13	0,087	16	1,392	0,0076	256	16,05	-0,05	0,0025
14	0,084	16	1,344	0,0071	256	15,6	0,4	0,16
15	0,08	15	1,2	0,0064	225	15	00	00
16	0,077	13	1	0,0059	169	14,55	-2,4	0,25
17	0,074	11	0,814	0,0055	121	14,1	-3,1	9,61
18	0,072	11	0,792	0,0052	121	13,8	-2,8	7,84
19	0,067	12	0,804	0,0045	144	13,05	-1,05	1,1
20	0,065	11	0,715	0,0042	121	12,75	-1,75	3,1
21	0,063	11	0,693	0,004	121	12,45	-1,45	2,1
22	0,059	10	0,59	0,0035	100	11,85	-1,85	3,4
23	0,056	9	0,504	0,0031	81	11,4	-2,4	5,76
24	0,053	9	0,477	0,0028	81	10,95	-1,95	3,8
25	0,05	10	0,5	0,0025	100	10,5	-0,5	0,25
Σ	2,53	450	52,5	0,3	9350	453.45	-5,35	120
متوسط القيم	0,1	18	2,1	0,012	374			4,8
σ	0,04	7				6,9		
σ^2	0,0017	50				47.52		4,8

الارتباط البسيط غير الخطي(ρ_{xy}).

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{120}{1250}} = 0{,}95$$

هذه القيمة تدل على وجود علاقة متينة جدا بين تكلفة الوحدة من السلعة وكمية الإنتاج.

4- تقييم وتقدير فعالية التمثيل:

ننتقل الآن إلى دراسة فعالية دالة القطع الزائد في تمثيل العلاقة بين(x, y)

أ- اختبار المعنوية الاقتصادية: نلاحظ أن المعامل (b) إشارته موجبة وهذا ما يتفق مع النموذج المقدر وعلاقته بالظاهرة المدروسة. فمعادلة القطع الزائد تعني أنه كلما زاد مستوى الإنتاج (x_i)كلما انخفضت كلفة الوحدة(y_i)، مع اعتبار أن (b) موجبة وهذا ما يتفق والتصور الاقتصادي لهذه العلاقة.

ب- اختبار المعنوية الإحصائية :يتعلق الأمر هنا بدراسة فعالية التمثيل وذلك من خلال حساب معامل التحديد البسيط (R^2):

$$R^2 = \rho^2 = (\ 0{,}95\ )^2 = 0{,}90$$

هذا يدل على أن فعالية المعادلة $\hat{y}_i = 3 + 150.\frac{1}{x_i}$ في تمثيل العلاقة محل الدراسة بين (x, y) تعتبر جيدة جدا.

- حساب مقياس فيشر(F):

$$F_{réel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}90}{1-0{,}90} \times \frac{25-1-1}{1} = 207$$

من جدول التوزيع الإحصائي لقيم (F) المقابلة لدرجات حرية $V_1=1$ و $V_2=23$ ومستوى معنوية $\alpha=0{,}05$ ، نجد:

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1 , v_2) = F_{(0,05)}(1 , 23) = 4,28$$

أي أن : $F_{réel} > F_{tab}$

هذا يعني أن قيمة (R^2) المحصل عليها من جراء تمثيل العلاقة المدروسة بواسطة معادلة القطع الزائد هي قيمة موضوعية و أن هذه المعادلة تمثل هذه العلاقة تمثيلا موضوعيا.

5- إجراء تقدير (عملية استطلاع) لتكلفة الوحدة من السلعة المعنية ($\hat{y}_{25}$) عندما يكون مستوى الإنتاج $x_p = 25$:

تقدير قيمة $\hat{y}_{25}$ يتطلب استخدام نموذج الانحدار المقدر السابق. من أجل إمكانية استعمال هذا النموذج في عمليات التوقع و الاستطلاع يجب أولا اختبار جودة الأداء العام لهذا النموذج باستخدام معامل عدم التساوي(U) :

لدينا :

$$U = \frac{\sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}}{\sqrt{\frac{(\Sigma y_i)^2}{n}} + \sqrt{\frac{(\Sigma \hat{y}_i)^2}{n}}}$$

$$\frac{\Sigma(\hat{y} - y_i)^2}{n} = 4,8 \;\; ; \;\; \frac{(\Sigma y_i)^2}{n} = 8100 \;\; ; \;\; \frac{(\Sigma \hat{y}_i)^2}{n} = 8246,7$$

$$U = \frac{\sqrt{4,8}}{\sqrt{8100} + \sqrt{8246,7}} = \frac{2,2}{90+90,8} = 0,012$$

قيمة معامل عدم التساوي المحصل عليها توضح بأن قدرة نموذج الانحدار المقترح على التوقع و الاستطلاع جيدة جدا وذلك لقرب هذه القيمة من الصفر. من أجل إجراء عملية الاستطلاع وتقدير قيمة $\hat{y}_{25}$ ، نعوض قيمة $x_p = 25$ في معادلة القطع الزائد المقدرة فنحصل على:

$\hat{y}_{25} = 3 + 150 \cdot \frac{1}{25} = 9$. إذن القيمة التقديرية لتكلفة السلعة عندما يكون مستوى الإنتاج $x_p = 25$ هي: $\hat{y}_{25} = 9$ وحدات. أما قيمة التكلفة الحقيقية (الفعلية) y_{25} المقابلة لمستوى الإنتاج $x_p=25$ فلا نستطيع أن نحصل عليها بدقة ولكن نستطيع أن نحدد المجال الذي تتراوح فيه فقط.

متوسط الخطأ المعياري ($S.E_{\hat{y}p}$) للقيمة المقدرة $\hat{y}_{25}$ هو:

$$S.E_{\hat{y}p} = s_{\hat{y}y} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(z_p - \bar{z})^2}{\Sigma(z-\bar{z})^2}}$$

$$s_{y\hat{y}} = s_\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{120}{25-1-1}} = 2,28$$

$$\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{(0,04-0,1)^2}{0,0425}} = \sqrt{0,04+0,085} = 0,35$$

$$m_{\hat{y}p} = S.E_{\hat{y}p} = 2,28 \cdot 0,35 = 0,798$$

مجال الثقة الذي يمكن للتكلفة الفعلية (y_{25}) أن تتراوح فيه هو:

$$y_{25} = \hat{y}_{25} \pm [0,798 \times t_{tab}]$$

t_{tab} : قيمة مقياس التوزيع لستيودنت عند درجة حرية مقدارها $V_2 = (n-m-1)$ وعند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$ ، (t_{tab} تستخرج من الجدول).

$$t_{(0,05)}(v_2) = t_{(0,05)}(23) = 2,0687$$

إذن: $\hat{y}_{25} \pm [0,798 \times 2,0687] = 9 \pm 1,651$

وتكون(y_{25}) محصورة بين القيم التالية : $7,349 < y_{25} < 10,651$ باحتمال كبير قدره 0,95.

– **مثال 3 :**

الجدول التالي يظهر المبالغ (مليون دج) التي تنفقها مزرعة ما على التجهيز والدعم التقني للإنتاج وكذلك الكميات المنتجة من محصولها خلال 20 سنة :

النفقات على التجهيز (10^5) دج	50	54	56	58	59	59	64	67	69	71
مستوى الإنتاج	42	40	65	32	60	65	48	69	59	57
النفقات على التجهيز(10^5) دج	73	73	74	76	87	88	90	95	114	120
مستوى الإنتاج	57	77	79	77	74	79	82	77	85	88

المطلوب:

1- تكوين نموذج الانحدار المعبر عن علاقة مستوى التجهيز بكمية الإنتاج.

2- تقدير معادلة التمثيل لهذه العلاقة.

3- دراسة علاقة الارتباط بين هذين المؤشرين.

4- تقييم جودة التمثيل لهذا النموذج .

5- تقدير الكميات المنتجة $\hat{y}_p$ عندما يصبح المبلغ المنفق على التجهيز $x_p = 130$ م.د وعندما يصبح $x_p = 30$.

الحــــل :

1- تكوين نموذج الانحدار: نرسم شكل الانتشار للأزواج المرتبة(x, y) . من شكل الانتشار هذا نلاحظ أن الاتجاه العام بصفة عامة يمثل منحنى خط مستقيم متصاعد وذلك بغض النظر عن بعض النقاط الشاذة التي قد تكون ناتجة عن أسباب أو عوامل أخرى غير(x_i) .

نقوم إذن بتمثيل هذه العلاقة بمعادلة المستقيم : $\hat{y}_i = a + bx_i$

2- تقدير معادلة الانحدار المقترحة:

من أجل تقدير معاملات هذا النموذج نقوم بإعداد الجدول التالي:

	y_i	x_i	$y_i.x_i$	x_i^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
	42	50	2100	2500	1764	50,45	-8,45	71,4
	40	54	2160	2916	1600	53,05	-13,05	170,3
	65	56	3640	3136	4225	54,35	10,65	113,42
	32	58	1856	3364	1024	55,65	-23,65	559,32
	60	59	3540	3481	3600	56,3	3,7	13,69
	65	59	3835	3481	4225	56,3	8,7	75,69
	48	64	3072	4096	2304	59,55	-11,55	133,4
	69	67	4623	4489	4761	61,5	7,5	56,25
	59	69	4071	4761	3481	62,8	-3,8	14,44
	57	71	4047	5041	3249	64,1	-7,1	50,41
	77	73	5621	5329	5929	65,4	11,6	143,56
	77	75	5621	5329	5929	65,4	11,6	143,56
	79	74	5846	5476	6241	66,05	12,95	167,7
	77	76	5852	5776	5929	67,35	9,65	93,12
	74	87	6438	7569	5476	74,5	-0,5	0,25
	79	88	6952	7744	6241	75,15	3,85	14,82
	82	90	7380	8100	6724	76,45	5,55	30,8
	77	95	7315	9025	5929	79,7	-2,7	7,29
	85	144	9690	12926	7225	92,05	-7,05	49,7
	88	120	10560	14400	7744	95,95	-7,95	63,2
Σ	1382	1497	104219	119009	93600			1954,35
القيم المتوسطة	66,6	74,85	5210,9	5950, 5	460			97,7
σ	15,6	18,65						
σ^2	244,5	347,9						97,7

$$b = \frac{\overline{x.y} - \bar{x}.\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{5210,95 - 66,6 \times 74,85}{5950,45 - (74,85)^2} = \frac{225,94}{347,93} = 0,65$$

$$a = \bar{y} - b.\bar{x} = 66,6 - 0,65.\ 74,85 = 17,95$$

يكون النموذج التقديري لمعادلة التمثيل هو: $\hat{y}_i = 17,95 + 0,65x_i$

3- دراسة علاقة الارتباط:

من وجهة نظر اقتصادية ندرك بأنه بصفة عامة هناك علاقة عامة بين مستوى مكننة الإنتاج وكمية الإنتاج، حيث يؤثر الأول في الثاني. لذلك نرمز بــ(x) لدرجة التجهيز و(y) لمستوى الإنتاج. نعرف أيضا أن طبيعة العلاقة الارتباطية بينهما هي علاقة طردية، فمستوى الإنتاج يتزايد بزيادة درجة ومستوى التجهيز المستعمل في العمل. لقياس درجة وقوة العلاقة الارتباطية بينهما نحسب معامل الارتباط لبيرسون(r_{xy}):

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{225,94}{15,64 \times 18,65} = 0,775$$

هذه القيمة لمعامل الارتباط (r_{xy}) تدل على وجود علاقة ليست متينة لكنها مقبولة. إن ضعف العلاقة بين المؤشرين محل الدراسة والتي انعكست من خلال قيمة معامل الارتباط الضعيفة ترجع في أغلب الظن إلى أسباب أخرى لم تأخذ بعين الاعتبار عند دراسة هذه الظاهرة مثل سوء استعمال وسائل الإنتاج والتجهيزات من طرف العمال نتيجة لسوء مستوى تأهيلهم أو لضعف مهمة المراقبة والتنظيم في المزرعة، انخفاض مستوى أجور الفلاحين والعمال وانعكاس ذلك على مستوى أداءهم أولأسباب أخرى مثل الأخطاء الإحصائية المرتكبة أثناء جمع المعلومات.

4 - تقييم نموذج الانحدار المحصل عليه :

- حساب معامل التحديد البسيط:(R^2_{xy}):

$$R^2 = r^2_{xy} = (0,775)^2 = 0,6$$

هذه القيمة لـــ(R^2) تدل على أن تمثيل العلاقة بين (x, y) من خلال المعادلة المقترحة يعتبر ذو فعالية ضعيفة وهي تؤكد نفس النتيجة المحصل عليها من خلال مقياس الارتباط البسيط. بما أن شكل الانتشار لقيم (x, y) لا يوحي بضرورة تمثيل العلاقة بينهما من خلال نموذج رياضي آخر، فنستطيع القول أن العلاقة بين (x, y) هي علاقة خطية و لكنها ليست قوية، فهناك على الأرجح عوامل أخرى محددة أو عشوائية تؤثر في المؤشر(y) بالإضافة إلى (x)، أو أن هناك أخطاء في جمع البيانات الإحصائية. إن قيمة (R^2) تعبر عن درجة تأثير(x) في (y) ، وفي حالتنا هذه نلاحظ ضعف تأثير الأول في الثاني، وبالتالي نقول أن المؤشر(x) لا يحدد وحده المسار الذي يأخذه (y). فالمؤشر(x) يؤثر بنسبة 60% فقط على (y)وبقية العوامل بـــ 40% .

حتى نتأكد من أن قيمة معامل التحديد(R^2) المحصل عليها هي قيمة موضوعية (أو غير موضوعية) نستخدم مقياس فيشر(F) :

$$F_{réel} = \frac{R^2}{1-R^2}\times\frac{n-m-1}{m} = \frac{0,6}{1-0,6}\times\frac{20-1-1}{1} = 27$$

من الجدول الإحصائي لـــ(F) نحصل على قيمةF_{tab} :

$$F_{tab} = F_{(0,05)}\,(v_1\,,v_2\,) = F_{(0,05)}\,(\,1\,,\,18\,) = 4,41$$

$$F_{réel} > F_{tab} \quad (\,27 > 4,41\,)$$

هذا يعني أن قيمة (R^2) المحصل عليها هي قيمة موضوعية ويمكن استعمالها كمقياس لتقدير فعالية التمثيل.

5 - تقدير الكميات المنتجة عندما يصبح المبلغ المنفق على التجهيز في المزرعة هو: $x_p = 130$. إذا افترضنا أن القدرة التوقعية لنموذج الانحدار المقدر جيدة، فإنه بالتعويض في المعادلة $\hat{y}_{130} = 17,95 + 0,65x_i$

نحصل على قيمة $\hat{y}_{130}$: $\hat{y}_{130} = 17,95 + 0,65 \,.\, 130 = 102,45$

إذن مستوى الإنتاج المتوقع عندما يصبح مستوى نفقات التجهيز = 130 مليون دج هو $\hat{y}_{130} = 102,45$.وعندما كان مستوى الإنفاق على التجهيز هو30 = x_p فإن مستوى الإنتاج كان:

$\hat{y}_{30} = 17,95 + 0,65 \,.\, 30$ ، أي: $\hat{y}_{30} = 37,45$.

أما قيمة الإنتاج الفعلية (y_{130}) المقابلة لمستوى إنفاق $x_p = 130$ فلا نستطيع تحديدها بدقة ولكن نستطيع تحديد المجال الذي نتوقع أن تتراوح فيه كالتالي:

$$S.E_{\hat{y}p} = s_{y\hat{y}} \,.\, \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\Sigma(x - \bar{x})^2}}$$

$$\sigma_{y\hat{y}} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - \hat{y})^2}{n - m - 1}} = \sqrt{\frac{1954{,}35}{18}} = 10{,}42 \ ;$$

$$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{(130 - 74{,}85)^2}{6958{,}6}} = 0{,}698$$

$$S.E_{y\hat{y}} = 10{,}42 \,.\, 0{,}698 = 7{,}27$$

إذن المجال الذي يمكن للقيمة الفعلية لمستوى الإنتاج(y_{130}) أن تتراوح فيه يكون:

$$\hat{y}_{130} \ \pm \left[7{,}27 \times t_{tab} \right]$$

$$t_{tab} = t_{(0,05)}\,(\,v_2\,) = t_{(0,05)}\,(\,18\,) = 2{,}101$$

$$\hat{y}_{130} \pm [\,7{,}27 \,.\, 2{,}101\,] = \pm 15{,}27 + 102{,}45$$

فيكون مجال قيمة (y_{130}) محدد كالتالي:

$$102{,}45 - 15{,}27 < y_{130} < 102{,}45 + 15{,}27$$

باحتمال كبير يقارب 0,95.

بنفس الطريقة نحدد المجال الذي تتراوح فيه القيمة الفعلية (y_{30}).

مثـــال 4 :

تؤدي زيادة الثمن على سلعة ما (A) إلى زيادة الكمية المطلوبة من السلعة البديلة كالتالي(B):

الثمن (10دج)	8	10	12	14	16	18	20	22	24
الكمية المطلوبة	79,25	81	86,34	95,7	102,33	106,4	108,1	112,4	114,42

الثمن (10دج)	26	28	30	32	34	36	38	40
الكمية المطلوبة	116,2	118,77	123,17	124,4	125	130	130,4	132

المطلوب:

1- باستعمال هذه المعطيات قدر نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين ثمن السلعة (A) والطلب على السلعة (B) في الحالتين التاليتين:

- إذا كان النموذج في شكل خط مستقيم .
- إذا كان في شكل دالة لوغاريتمية من الشكل: $\hat{y}_i = a + b.\log x_i$

2- أجر تقييما لكلا النموذجين واختر أحسنهما.

الحـــل :

أولا: اختبار نموذج الانحدار في حالة ما إذا كان في شكل معادلة مستقيم:

1- تقدير هذا النموذج: من أجل حساب المعاملات (b, a) لمعادلة الانحدار $\hat{y}_i = a + bx_i$ ، نحل المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى بالنسبة لـــ b, a في حالة المستقيم الذي يلبي الشرط $S(a,b) = \min$.

$$\begin{cases} n.a + b.\Sigma x_i = \Sigma y_i \\ a\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 = \Sigma (y_i . x_i) \end{cases}$$

باستعمال المعطيات الأولية نستخرج قيم المقادير اللازمة لحساب هذه القيم (أنظر الجدول)

	x_i	x_i	$x_i.y_i$	x_i^2	y_i^2
	8	79,25	634	64	6280,56
	10	81	810	100	6561
	12	86,34	1036,08	144	7454,6
	14	95,7	1339,8	196	915,5
	16	102,33	1637,28	256	10471,4
	18	106,4	1915,2	324	11321
	20	108,1	2162	400	11685,6
	22	112,4	2472,8	484	12633,8
	24	114,42	2746,08	576	13091,9
	26	116,2	3021,2	676	13502,44
	28	118,77	3325,56	784	14106,3
	30	123,17	3695,1	900	15170,85
	32	124,4	3980,8	1024	15475,36
	34	125	4250	1156	15625
	36	130	4680	1296	16900
	38	130,4	4955,2	1444	17004,16
	40	132	5280	1600	17424
Σ	408	1885,88	47941,1	11424	213866,5
القيم المتوسطة	24	110,93	2820	672	12580,4
σ	9,8	16,55			
σ^2	96	274			

$$b = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{157,68}{96} = 1,64$$

$$a = \bar{y} - b.\bar{x} = 110,93 - 1,64 \times 24 = 71,57 \;;$$

معادلة نموذج الانحدار في حالة ما إذا كانت في شكل خط مستقيم هي: $\hat{y}_i = 71,57 + 1,64\, x_i$

2- تقييم النموذج الخطي المقترح :

معامل الارتباط البسيط(r_{xy}): $r_{xy} = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{157,68}{162,19} = 0,97$

هذه القيمة لمعامل الارتباط تدل على وجود علاقة طردية قوية بين قيم (x, y) .

معامل التحديد (R_1^2) : $R_1^2 = (r^2) = (0,97)^2 = 0,94$

قيمة (R_1^2) تدل على أن معادلة المستقيم تمثل العلاقة بين (x,y) بشكل جيد و موضوعي وأن 94% من تغيرات المؤشر الناتج ترجع كليا إلى تغير(x_i) وهذه نتيجة موضوعية جدا .

للحكم أكثر على موضوعية معامل التحديد نجري اختبار H_0باستخدام مقياس فيشر(F) .

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,94}{1 - 0,94} \times \frac{17 - 1 - 1}{1} = 235$$

ونستخرج قيمة (F_{tab}) من جدول التوزيع الإحصائي لفيشر .

$$F_{tab} = F_{(0,05)} (v_1 , v_2) = F_{(0,05)} (1, 15) = 4,54$$

إن مقارنةF_{reel} بـ F_{tab} تسمح لنا بالحكم على نموذج الانحدار الخطي البسيط المقترح بالموضوعية والفعالية في التمثيل، وكذلك موضوعية معامل التحديد في قياس هذه الفعالية.

ثانيا: اختبار نموذج الانحدار في حالة ما إذا كان دالة لوغاريتمية من الشكل : $\hat{y}_i = a + b.\log x_i$

1- تقدير النموذج اللوغاريتمي :

لإمكانية تقدير معاملات هذا النموذج نحل المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى بدلالة (b, a) في حالة ما إذا كان نموذج الانحدار في شكل دالة لوغاريتمية:

$$\begin{cases} n.a + b.\Sigma(\log x_i) = \Sigma y_i \\ a.\Sigma(\log x_i) + b.\Sigma(\log x_i)^2 = \Sigma(y_i . \log x_i) \end{cases}$$

إذا وضعنا ($\log x = z$) فإن المعادلتين السابقتين تأخذان الشكل التالي:

$$\begin{cases} n.a + b.\Sigma z = \Sigma y_i \\ a.\Sigma z + b.\Sigma z^2 = \Sigma(y.z) \end{cases}$$

من أجل حل هذين المعادلتين واستخراج قيم b, a نعد الجدول التالي:

	z_i	z_i^2	$z_i.y_i$	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i-\bar{y})^2$
	0,9	0,81	71,32	76,53	-2,72	7,4	1183,36
	1	1	81	84,53	-3,53	12,46	696,96
	1,08	1,17	93,25	90,93	-4,59	21,1	400
	1,15	1,32	110	96,53	-0,83	2,69	207,36
	1,2	1,44	122,8	100,53	1,8	3,24	108,16
	1,26	1,59	134,1	105,53	1,7	2,89	31,36
	1,3	1,69	140,53	108,33	-0,43	0,18	5,76
	1,34	1,8	150,6	111,73	0,67	0,45	0,8
	1,38	1,9	157,9	114,93	-0,51	0,26	4
	1,4	1,96	162,68	116,53	-0,33	0,11	31,36
	1,45	2,1	172,2	120,53	-1,76	3,1	92,16
	1,48	2,19	182,34	122,93	0,24	0,06	144
	1,5	2,25	186,6	124,53	-0,13	0,02	184,96
	1,53	2,34	191,85	126,93	-1,93	3,7	256
	1,56	2,43	202,8	129,33	0,76	0,45	338,56
	1,58	2,5	206	130,93	-0,53	0,28	400
	1,6	2,56	211,2	132,53	-0,53	0,28	466,56
Σ	22,71	31	2576,53			56,66	4651,36
القيم المتوسطة	1,33	1,82	151,56			3,34	267,73
σ	0,22						
σ^2	0,05					3,34	267,73

$$a = \bar{y} - b.\bar{z} = 110{,}93 - 80 . 1{,}33 = 4{,}53$$

$$b = \frac{\overline{z \times y} - \bar{z} \times \bar{y}}{\overline{z^2} - \bar{z}^2} = \frac{4}{0{,}05} = 80$$

معادلة الانحدار في الشكل اللوغاريتمي هي: $\hat{y}_i = 4{,}53 + 80z_i$ أي:

$\hat{y}_i = 4{,}53 + 80.\log x_i$

2- تقييم هذا النموذج:

- حساب معامل الارتباط غير الخطي البسيط ρ_{xy} :

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{56{,}67}{46{,}58}} = 0{,}99$$

تدل قيمة معامل الارتباط في هذه الحالة على أن العلاقة بين (x, y) هي أقوى منها في حالة معادلة مستقيم .

- معامل التحديد (R_2^2):

$$R^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 / \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}-\bar{y})^2}{\Sigma(y-\bar{y})^2} = \frac{4551{,}36}{4658} = 0{,}98$$

أو : $R^2 = (r^2) = (0{,}99)^2 = 0{,}98$

هذه القيمة لمعامل التحديد تدل على فعالية جيدة جدا للمعادلة اللوغاريتمية في تمثيل العلاقة بين المؤشرين محل الدراسة. بمعنى أن ثمن السلعةA وهو (x_i) يؤثر في الكمية المطلوبة من السلعة البديلة (B) بـــ 98%.

- اختبار مقياس فيشر (F) :

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}98}{1-0{,}98} \times \frac{15}{1} = 735$$

$$F_{tab} = F_{(0,05)} (v_1 , v_2) = F_{(0,05)} (1 ,15) = 4{,}54$$

$F_{reel} > F_{tab}$: ($735 > 4{,}54$)

هذا يدل على موضوعية معامل التحديد ومعادلة التمثيل.

إذا قارنا قيمة (R_1^2)المحصل عليها عند تمثيل العلاقة المدروسة بواسطة معادلة مستقيم وقيمة (R_2^2) المحصل عليها في المعادلة اللوغاريتمية فإننا نجد أن: $R_1^2 < R_2^2 \quad (0,98 > 0,94)$

هذا يعني أن المعادلة اللوغاريتمية هي أكثر فعالية في تمثيل العلاقة المدروسة من معادلة المستقيم.

- مثال 5 :

يعطي الجدول التالي قيم الإنفاق الاستهلاكي الشخصي والدخل المتاح للإنفاق(و.ن) لإحدى الدول من 1992 إلى2001.

المطلوب :

1- دراسة العلاقة الارتباطية بين هذين المؤشرين .

2- تكوين النموذج القياسي المناسب له

3- تقدير هذا النموذج

4- تقييم جودة وفعالية تمثيل هذا النموذج .

5 -تقدير الإنفاق الاستهلاكي عندما يكون مستوى الدخل المخصص للإنفاق = 300و.ن ، 400 و.ن وأيضا عند مستوى50 و.ن، بمدى ثقة يقابل احتمال ثقة قدره 0,95.

الإنفاق الاستهلاكي(و.ن)	الدخل المخصص للإنفاق(و.ن)	السنة
100	110	1992
95	120	1993
120	140	1994
125	160	1995
140	180	1996
145	200	1997
150	220	1998
170	240	1999
185	260	2000
180	280	2001

الحـــل:

1- دراسة العلاقة الارتباطية بين المؤشرين: نعرف أن العلاقة بين الإنفاق على الاستهلاك للأفراد و الدخل الموجه للإنفاق على هذا الاستهلاك هي علاقة يؤثر فيها الثاني على الأول. فنرمز بـــ (x) للدخل وب (y) لكمية الاستهلاك. نلاحظ مبدئيا من جدول المعطيات أن الإنفاق على الاستهلاك يزداد بزيادة الدخل، أي أن هناك على العموم علاقة طردية بينهما. من أجل قياس درجة متانة العلاقة بينهما نقوم بإعداد قيم المقادير المتضمنة في الجدول أدناه:

	x_i	y_i	$x_i.y_i$	x_i^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
	110	100	11000	12100	10000	100,5	-0,5	0,25
	120	95	11400	14400	9025	105,5	-10,5	110,25
	140	120	16800	19600	14400	115,5	4,5	20,25
	160	125	20000	25600	15625	125,5	-0,5	0,25
	180	140	25200	32400	19600	135,5	4,5	20,25
	200	145	29000	40000	21025	145,5	-0,5	0,25
	220	150	33000	48400	22500	155,5	-5,5	30,25
	240	170	40800	57600	28900	165,5	4,5	20,25
	260	185	48100	67600	34225	175,5	-9,5	90,25
	280	180	50400	78400	32400	185,5	-5,5	30,25
Σ	1910	1410	285700	396100	207700	-	-	322,5
ق. المتوسطة	19,1	14,1	28570	39610	20770	-	-	-
σ	55,94	29,82						
σ^2	3129	889						

- معامل الارتباط لبيرسون هو :

$$r_{xy} = \frac{\overline{x\times y} - \bar{y}\times\bar{x}}{\sigma_y \times \sigma_x} = \frac{28570 - 191\times141}{55{,}94\times 29{,}82} = 0{,}98$$

هذه القيمة لمعامل الارتباط البسيط تدل على وجود علاقة ارتباطية خطية طردية قوية بين المتغيرين محل الدراسة. هذا يعني أن الزيادة في قيمة أحد المتغيرين تؤدي إلى الزيادة في قيم المتغير الآخر.

2- تكوين النموذج القياسي لهذه العلاقة: نرسم شكل الانتشار للأزواج المرتبة (x,y) على محورين. من شكل الانتشار نلاحظ أن

الاتجاه العام يمثل خط مستقيم، يمكن أن نعبر عليه من خلال المعادلة
. $\hat{y}_i = a + b.x_i$

3- تقدير هذا النموذج :

المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى اللتين تحققان الشرط:
$S(a,b) = \min$ هما :

$$\begin{cases} a + b.\Sigma x_i = \Sigma y_i \\ a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i.x_i \end{cases}$$

باستعمال العبارتين التاليتين المستخرجتين من هذين المعادلتين، نحسب معاملات معادلة الانحدار السابقة:

$$a = \bar{y} - b..\bar{x} = 141 - 0{,}5 \;.\; 191 = 45{,}5$$

$$b = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{1639}{3129} = 0{,}5$$

معادلة المستقيم المقدرة هي: $\hat{y}_i = 45{,}5 + 0{,}5x_i$

4-تقييم وتقدير جودة التمثيل:

في المعادلة التقديرية السابقة نلاحظ أن معامل (x_i)وهو (b) إشارته موجبة وهو يعكس التصور الصحيح المتناسب مع التصور الاقتصادي الذي ينص على أن الدخل يؤثر في كمية الاستهلاك تأثيرا موجبا فكلما زاد الدخل زاد مستوى الاستهلاك.

من الناحية الإحصائية، فإننا نهدف إلى اختبار درجة فعالية المعادلة الرياضية المقترحة لتمثيل العلاقة بين المؤشرين. فهي توضح درجة تأثير (x_i) على (y_i) من خلال المعادلة المقترحة. لذلك نقوم بحساب

معامل التحديد البسيط: $R^2 = (r_{xy})^2 = (0{,}98)^2 = 0{,}96$

هذا يدل على أن 96% من التغير في (y) يرجع سببه إلى التغير في

(x)أما الباقي وهو 4% فيرجع إلى التغير في عوامل أخرى. بمعنى آخر التأثير الكبير في قرار الاستهلاك الفردي يرجع إلى مستوى الدخل الذي يتلقاه هذا الفرد وأن العوامل الأخرى تؤثر بدرجة قليلة.

- استخراج مقياس فيشر:

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,96}{1-0,96} \times \frac{8}{1} = 192$$

ونستخرج من الجدول القيمة الحرجة F_{tab} :

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1, v_2) = F_{(0,05)}(1, 8) = 5,32$$

إذن: $F_{reel} > F_{tab} \quad (192 > 5,32)$

ما دام أن: $F_{reel} > F_{tab}$، فإن قيمة (R^2) المحصل عليها هي قيمة موضوعية.

5- حساب مقادير الإنفاق عل الاستهلاك خارج السلسلة المعطاة:

تقدير الإنفاق الاستهلاكي عندما يصبح مستوى الدخل $x_p=300$.

هذا يقودنا إلى حساب قيمة($\hat{y}_{300}$):

لدينا: $\hat{y}_i = 45,5 + 0,5x_i$

أي: $\hat{y}_{300} = 45,5 + 0,5 \,.\, 300$ ، فتكون القيمة التقديرية للإنفاق على الاستهلاك إذن هي: $\hat{y}_{300} = 195,5$.

من أجل تحديد المجال الذي تتراوح فيه القيمة الحقيقية للاستهلاك(y_{300}) نحسب متوسط الخطأ المعياري$(S.E_{\hat{y}p})$ للقيمة المقدرة وهي $\hat{y}_{300}$:

$$S.E_{\hat{y}p} = s_{y\hat{y}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}} ;$$

$$s_{y\hat{y}} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\hat{y})^2}{n-m-1}} = \sqrt{\frac{322,5}{8}} = 6,35$$

$$S.E_{\hat{y}y} = 6,35.\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(300-191)^2}{31290}} = 6,35.\ 0,69 = 4,38$$

مجال تقدير القيمة الحقيقية للإنفاق الاستهلاكي (y_{300}) يكون:

$$\hat{y}_{300} \pm [4,38\ .\ t_{tab}\ ]$$

$$t_{tab} = t_{(0,05)}(v_2) = t_{(0,05)}(8) = 2,306$$

$$\hat{y}_{300} \pm [4,38\ .\ 2,306] = \hat{y}_{300} \pm 10,1$$

$$195,5 - 10,1 < y_{300} < 195,5 + 10,1$$

بنفس الطريقة نحسب قيمة $(\hat{y}_{400})$ و قيمة $(\hat{y}_{50})$ التقديريتان.

– مثال 6 :

لتكن السلسلة التالية لمعطيات مؤشرين(x,y):

74	70	74	54	56	56	42	54	38	42	34	26	30	22	y
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	x

المطلوب :

1- تكوين نموذج الانحدار الذي يعكس العلاقة بين هذين المؤشرين.

2- تقدير هذا النموذج.

3- تقييم جودة التمثيل.

الحــــل:

1- برسم الأزواج المرتبة (x,y) على محورين يتضح أن الاتجاه العام لشكل الانتشار هو خط مستقيم معادلته من الشكل: $\hat{y}_i = a + b.x_i$

2 - تقدير معادلة هذا المستقيم: نعد الجدول التالي (أنظر الصفحة الموالية) الذي يسمح بحساب معاملات معادلة المستقيم المقترح.

$$b = \frac{\overline{x \times y} - \bar{y} \times \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{424,29 - 7,5 \times 48}{72,5 - 7,5^2} = \frac{64,25}{16,25} = 3,95$$

$$a = \bar{y} - b.\bar{x} = 48 - 3,95 \;.\; 7,5 = 18,38$$

وتكون المعادلة التقديرية المطلوبة هي : $\hat{y}_i = 18,38 + 3,95x_i$

3- تقييم جودة التمثيل :

- معامل الارتباط البسيط: $r_{yx} = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_y \times \sigma_x} = \frac{64,25}{66,68} = 0,96$

هناك إذن علاقة ارتباطية قوية بين المؤشرين(x,y) محل الدراسة .

- حساب معامل التحديد البسيط (R^2) :

$$R^2 = (r_{xy})^2 = (0,96)^2 = 0,92$$

قيمة (R^2) توضح أن معادلة التمثيل المقترحة موضوعية وأن المتغير المستقل (x_i) يؤثر بنسبة كبيرة (92%) على (y) وهناك فقط 8% من التغيرات في(y) سببها عوامل أخرى غير(x_i) .

- اختبار فيشر (اختبار F) :

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,92}{1-0,92} \times \frac{14-2}{1} = 138$$

ونستخرج أيضا من جدول التوزيع لفيشر F_{tab} :

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1, v_2) = F_{(0,05)}(1, 12) = 4,75$$

فتكون : $F_{reel} > F_{tab}$: $(138 > 4,75)$

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	y_i^2
	1	22	22	1	484
	2	30	60	4	900
	3	26	78	9	676
	4	34	136	16	1156
	5	42	210	25	1764
	6	38	228	36	1444
	7	54	378	49	2916
	8	42	336	64	1764
	9	56	504	81	3136
	10	56	560	100	3136
	11	54	594	121	2916
	12	74	888	144	5476
	13	70	910	169	4900
	14	74	1036	196	5476
Σ	105	672	5940	1015	36114
القيم المتوسطة	7,5	48	424,29	72,5	2581,7
σ	4	16,67			
σ^2	16,25	277,7			

هذه النتيجة تعني أن نموذج الانحدار الخطي المقترح جيد وأن معامل التحديد هو قيمة موضوعية ويصلح لاستخدامه كمقياس لتقييم جودة التمثيل.

– مثال 7:

عند دراسة علاقة متوسط ارتفاع أشجار المشمش في مزرعة ما بعمر تلك الأشجار تم الحصول على المعطيات التالية :

العمر بالسنة(x)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الارتفاع بالمتر(y)	0,9	1,38	1,8	2,15	2,39	2,6	2,78	2,93	3,06
العمر بالسنة(x)	11	12	13	14	15	16	-	-	-
الارتفاع بالمتر(y)	3,17	3,26	3,34	3,41	3,47	3,53	-	-	-

المطلوب:

1- تكوين نموذج الانحدار الذي يعكس علاقة (x , y).

2 – تقدير معاملات هذا النموذج.

3 – تقييم هذا النموذج.

الحـــل:

1- تكوين نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين العمر و طول الأشجار محل الدراسة: حتى نمثل تلك العلاقة بمعادلة رياضية، نرسم شكل الانتشار للأزواج المرتبة المتقابلة (x, y). من شكل الانتشار المحصل عليه نلاحظ أن المنحنى الذي يمكن أن يمثل هذه العلاقة هو منحنى المعادلة اللوغاريتمية ذات الشكل: $\hat{y}_i = a + b.\log x_i$

2- تقدير ثوابت هذه المعادلة: من أجل حساب ثوابت هذه المعادلة نضع أولا ($\log x = z$) ثم نعد الجدول التالي (أنظر الجدول على الصفحة الموالية) الذي يمكننا من حساب المقادير اللازمة لاستخراج قيم المعاملات المذكورة :

$$b = \frac{\overline{z \times y} - \bar{y} \times \bar{z}}{\overline{z^2} - \bar{z}^2} = \frac{2,58 - 0,89.2,68}{0,86 - (0,89)^2} = \frac{0,1948}{0,0679} = 2,87$$

$$a = \bar{y} - b.\bar{z} = 2,68 - 2,87 \,.\, 0,89 = 0,126$$

بعد حساب المعاملات نستطيع أن نكتب معادلة الانحدار المقدرة في شكلها اللوغاريتمي كالتالي : $\hat{y}_i = 0{,}126 + 2{,}87.\log x_i$

3- تقييم نموذج الانحدار المقترح :

- حساب معامل الارتباط المنحني البسيط:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{0{,}0637}{9{,}15}} = 0{,}99$$

هناك إذن علاقة متينة جدا بين متوسط ارتفاع أشجار المشمش وعمرها وأن هذه العلاقة طردية .

i	z_i	y_i	z_i^2	y_i^2	$z_i.y_i$	$\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$
1	0,3	0, 9	0,09	0,81	0,27	1,02	0,014
2	0,48	1,38	0,23	1,9	0,66	1,54	0,026
3	0,6	1,8	0,36	3,24	1,08	1,85	0,0025
4	0,7	2,15	0,49	4,6	1,5	2,17	0,0004
5	0,78	2,39	0,61	5,7	1,86	2,36	0,0009
6	0,85	2,6	0,72	6,76	2,21	2,57	0,0009
7	0,9	2,78	0,81	7,73	2,5	2,71	0,005
8	0,96	2,93	0,92	8,58	2,8	2,88	0,0017
9	1	3,06	1	9,36	3,06	3	0,0036
10	1,04	3,17	1,08	10	3,3	3,11	0,0036
11	1,08	3,26	1,17	10,6	3,5	3,23	0,0009
12	1,11	3,34	1,23	11,16	3,7	3,3	0,0016
13	1,15	3,41	1,32	11,63	3,9	3,4	0,0001
14	1,18	3,47	1,39	12	4,1	3,5	0,0009
15	1,2	3,53	1,44	12,46	4,24	3,57	0,0016
Σ	13,33	40,17	12,86	116,53	38,75	40,21	0,0637
القيم المتوسطة	0,89	2,68	0,86	7,77	2,58	–	–
σ	0,26	0,78					
σ^2	0,068	0,61					

- معامل التحديد(R^2) : لدراسة فعالية هذا التمثيل نقوم بحساب معامل التحديد البسيط في حالة معادلة منحنى بسيط:

$$R^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 / \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2} = 0{,}98$$

أو :

$$R^2 = (\rho_{xy})^2 = (0{,}99)^2 = 0{,}98$$

نلاحظ هنا أن معادلة الانحدار اللوغاريتمية هي ذات فعالية عالية جدا في تمثيل العلاقة بين عمر أشجار المشمش وطولها : حيث أن نسبة 98% من ارتفاع الشجرة محل الدراسة سببه هو زيادة عمرها.

لمعرفة موضوعية معامل التحديد (R^2) في قياس فعالية معامل الانحدار نحسب مقياس فيشر(F) .

$$F_{réel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}98}{1-0{,}98} \times \frac{13}{1} = 637$$

من جدول(F) نستخرج قيمة (F) الحرجة:

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1, v_2) = F_{(0,05)}(1, 13) = 4{,}67$$

بما أن : $(637 > 3{,}87)$: $F_{reel} > F_{tab}$

فإن هذا يدل على موضوعية تقدير (R^2) وعلى موضوعية تمثيل علاقة الانحدار المذكورة بواسطة المعادلة اللوغاريتمية.

- **مثال 8** :

السلسلة التالية تمثل معطيات خاصة بتطور مؤشرين(x, y) :

180	170	146	180	160	142	142	126	140	122	120	104	114	100	y
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	x

المطلوب :

1- تحديد نموذج الانحدار المعبر عن الاتجاه العام لتطور(y) .

2- تقدير هذا النموذج.

3- تقييم النموذج.

- الحـــــل :

1- بعد رسم الأزواج المتقابلة (x, y) لهذه السلسلة يتضح أن شكل الاتجاه العام لتطور العلاقة بين (x, y) هو خط مستقيم معادلته هي: $\hat{y} = a + b.x_i$

	x_i	y_i	$x_i.y_i$	x_i^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$y_i-\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$	A_i
	1	100	100	1	10000	100,86	-0,86	0,74	0,86
	2	114	228	4	12996	106,72	7,28	53	6,39
	3	104	312	9	10816	112,58	-8,58	73,62	8,25
	4	120	480	16	14400	118,44	1,56	2,43	1,3
	5	122	610	25	14884	124,3	-2,3	5,29	1,89
	6	140	840	36	19600	130,16	9,84	96,83	7
	7	126	882	49	15876	136	-10	100	1,13
	8	142	1136	64	20164	141,86	0,12	0,015	0,085
	9	142	1278	81	20164	147,74	-5,74	32,95	4
	10	160	1600	100	25600	153,6	6,4	40,96	4
	11	180	1980	121	32400	159,46	20,54	421,89	11,4
	12	146	1752	144	21316	165,32	-19,32	373,26	13,23
	13	170	2210	169	28900	171,18	-1,18	1,39	0,69
	14	180	2520	196	32400	177	3	9	1,67
Σ	105	1946	15928	1015	279516	-	-	1211,38	61,9
القيم المتوسطة	7,5	139	1137,7	72,5	19965,43	-	-	86,53	4,42
σ	4	25,39						86,53	-
σ^2	16,25	644,43						-	-

2- تقدير معاملات هذه المعادلة:

حساب المقادير المتضمنة في الجدول أعلاه يسمح بتقدير معادلة الانحدار السابقة. انطلاقا من المعادلتين الطبيعيتين الخاصتين بتقدير معاملات معادلة خط مستقيم الذي يتوفر فيه الشرط: $S(a,b) = \min$، نحسب قيم هذه المعاملات:

$$b = \frac{n.\Sigma(y_i \times x_i) - (\Sigma y_i)\times(\Sigma x_i)}{n.\Sigma x^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{14 \times 15928 - 105 \times 1946}{14 \times 1015 - 105^2} = \frac{18662}{3185}$$

$$a = \frac{\Sigma y_i - b.\Sigma x_i}{n} = \frac{1946 - 5,86 \times 105}{14} = 95$$

معادلة الانحدار المقدرة هي : $\hat{y}_i = 95 + 5,86.x_i$

3- تقييم جودة التمثيل :

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \times y} - \bar{y} \times \bar{x}}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{95,2}{101,56} = 0,94$$

هناك إذا علاقة ارتباطية متينة بين المتغيرين.

وتكون قيمة معامل التحديد البسيط هي:

$$R^2 = (r_{xy})^2 = (0,94)^2 = 0,88$$

هذه القيمة لمعامل التحديد تدل على أن تمثيل العلاقة محل الدراسة بين (x, y) بواسطة المعادلة الخطية $\hat{y}_i = 95 + 5,86x_i$ يعتبر ذو فعالية متوسطة: حيث أن 88% فقط من التغيرات التي تحدث للمتغير (y) تكون ناتجة عن تغير (x_i) أما الباقي (12%) فسببه تغير عوامل أو ظروف أخرى غير ممثلة في المعادلة.

- إجراء اختبار فيشر (اختبار F) : نحسب قيمة F الفعلية :

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,88}{1-0,88} \times \frac{14-1-1}{1} = 88$$

ثم نستخرج من جدول(F) قيمة F الحرجة (F_{tab}):

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1 , v_2) = F_{(0,05)}(1 ,12) = 4,75$$

إذن : $F_{reel} > F_{tab} \quad ; \quad (88 > 4,75)$

هذا يدل على أن قيمة معامل التحديد المحصل عليها هي قيمة موضوعية وأن معادلة التمثيل جيدة.

- حساب متوسط خطأ التقريب (Ā) :

$$\bar{A} = \frac{\Sigma A_i}{n} = \frac{1}{n}.\Sigma\left(\frac{|y_i - \hat{y}|}{y_i} \times 100\right)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{14}.(61,9) = 4,42\,\%$$

هذه القيمة لـــ (Ā) توضح أن متوسط القيم التقديرية تنحرف عن متوسط القيم الفعلية بـــ4,42% .

- **مثال 9** :

تتغير ظاهرة ما (y_i) بتغير العنصر المؤثر فيها (x_i) كالتالي:

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	**x**
129	107	74	65	65	50	52	50	60	80	90	94	124	**y**

المطلوب:

1- تكوين نموذج الانحدار المعبر عن العلاقة بين(x, y) .

2- تقدير هذا النموذج.

3- تقييم وتقدير جودة تمثيل هذا النموذج.

4- تقدير قيمة ($\hat{y}_i$) عند قيم x_i التالية: $x_p= 20$ ، $x_p= 15$ ، بمدى ثقة يقابل احتمال قدره 0,95.

- الحـــل :

1- عند رسم الأزواج المرتبة المتقابلة لقيم (x,y) على محورين (yox) يتضح من شكل انتشار هذه القيم أن الاتجاه العام يمثل معادلة من الدرجة الثانية (منحنى قطع مكافئ). لذلك نعتمد في تمثيلها على المعادلة من الدرجة الثانية في شكلها العام: $\hat{y}_i = a + b.x_i + c.x_i^2$

2- تقدير نموذج الانحدار المقترح: إن إجراء هذه الخطوة يتمثل في تحديد الثوابت (المعاملات) الملاءمة والتي تعطينا معادلة تمثيل العلاقة المذكورة أفضل تمثيل. من أجل هذا نستعمل المعادلات الطبيعية لطريقة المربعات الصغرى المحصل عليها سابقا. نحسب القيم التي نستعملها في استخراج قيم (a,b,c) (أنظر الجدول أدناه).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 91 & 819 \\ 91 & 819 & 8281 \\ 819 & 8281 & 89271 \end{vmatrix}, \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} 1040 & 91 & 819 \\ 7276 & 819 & 8281 \\ 69566 & 8281 & 89271 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta_b} = \begin{vmatrix} 13 & 1040 & 819 \\ 91 & 7276 & 8281 \\ 819 & 69566 & 89271 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta_c} = \begin{vmatrix} 13 & 91 & 1040 \\ 91 & 819 & 7276 \\ 819 & 8281 & 69566 \end{vmatrix}$$

$$\hat{y}_i = \frac{\Delta_a}{\Delta} + \frac{\Delta_b}{\Delta}.x_i + \frac{\Delta_c}{\Delta}.x_i^2 = 151{,}9 - 28{,}7x_i + 2x_i^2$$

$$(\Delta = 4736732\ ,\ \Delta_a = 719353908\ ,\ \Delta_b = -\ 135978752,\ \Delta_c = 9705332\ )$$

يكون النموذج التقديري لهذه العلاقة وهي على شكل منحنى من الدرجة الثانية هو:

$$\hat{y}_i = 152 - 29x_i + 2x_i^2$$

هذا المنحنى هو الذي يعطينا أصغر قيمة للدالة S(a,b) عندما تكون معادلة التمثيل المفروضة في شكل قطع مكافئ. باستخدام هذه المعادلة نحسب قيم ($\hat{y}_i$) (القيم التقديرية) ونرسم المنحنى التقديري بيانيا.

	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i.y_i$	$x_i^2.y_i$	$\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(\hat{y}_i-\bar{y})^2$
	1	124	1	1	1	124	124	125	+1	1936	2025
	2	94	4	8	16	188	376	102	+64	196	484
	3	50	9	27	81	270	810	83	49	100	9
	4	80	16	64	256	320	1280	68	144	0	144
	5	60	25	125	625	300	1500	57	9	400	529
	6	50	36	216	1296	300	1800	50	0	900	900
	7	52	49	343	2401	364	2548	47	25	784	1089
	8	50	64	512	4096	400	3200	48	4	900	1024
	9	65	81	729	6561	585	5265	53	144	225	729
	10	65	100	1000	10000	650	6500	62	9	225	324
	11	74	121	1331	14641	814	8954	75	1	36	25
	12	107	144	1728	20736	1284	15408	92	225	729	144
	13	129	169	2197	28561	1677	21801	113	256	2401	1089
Σ	91	1040	819	8281	89271	7276	69566	975	931	8832	8515

3- تقييم وتقدير جودة التمثيل:

نجري الآن تقييما لجودة نموذج الانحدار المختار لتمثيل الاتجاه العام الذي افترضناه ممثلا بمعادلة القطع المكافئ.

- معامل الارتباط (ρ_{xy}) :

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{931}{8832}} = 0,95$$

قيمة معامل الارتباط تشير إلى أن هناك علاقة منحنية قوية جدا بين المتغيرين محل الدراسة.

- معامل التحديد (R^2): $R^2 = \rho^2 = (0,95)^2 = 0,90$

هذا يدل بوضوح أن تمثيل العلاقة بين (x,y) من خلال المعادلة المنحنية المقترحة يعتبر ذو فعالية كبيرة، بالإضافة إلى هذا فإن قيمة(R^2) تعني أيضا أن 90% من التغيرات في(y) يرجع إلى التغير في (x_i).

- إجراء اختبار فيشر (اختبار F) :

حتى نتحقق من أن قيمة معامل التحديد البسيط (R^2) المحصل عليها أعلاه هي قيمة موضوعية نستخدم مقياس فيشر(F):

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,90}{1-0,90} \times \frac{10}{2} = 45$$

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1, v_2) = F_{(0,05)}(2, 10) = 4,10$$

$$F_{reel} > F_{tab} \quad ; \quad (45 > 4,10)$$

إذن قيمة (R^2) المستخرجة أعلاه هي قيمة موضوعية وتصلح لاستخدامها كمقياس لتقدير فعالية التمثيل.

4- القيام بعمليات الاستطلاع:

حساب قيمة ($\hat{y}_i$) عندما $x_p=15$ ، $x_p=20$ (حساب قيم $\hat{y}_{15}$، $\hat{y}_{20}$).

قبل القيام بالاستطلاع وتقدير قيم ($\hat{y}_i$) المطلوبة، نجري أولا تقييما للأداء العام لنموذج الانحدار المقترح باستخدام معامل عدم التساوي (U) .

$$U = \frac{\sqrt{\frac{\Sigma(\hat{y}-y_i)^2}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}(\Sigma\hat{y}_i)^2} + \sqrt{\frac{1}{n}(\Sigma y_i)^2}}$$

$$U = \frac{8,46}{\sqrt{\frac{1040^2}{13}} + \sqrt{\frac{975^2}{13}}} = \frac{8,46}{288,44 + 270,4} = 0,015$$

هذه النتيجة للمعامل (U) توضح أن نموذج الانحدار المقترح يتميز بقدرة توقعية واستطلاعية جيدة .

نعوض الآن قيمة $x_p=15$ في معادلة الانحدار المقدرة فنحصل على: $\hat{y}_{15}= 152-29(15)+2(15)^2$. القيمة المقدرة لـ $(\hat{y}_i)$ عندما $(x_p=15)$ هي: $\hat{y}_{15} = 167$. بعدها نحدد المجال الذي تتراوح فيه القيمة الفعلية(y_{15}) عند نفس المستوى $x_p=15$.

من أجل ذلك نحسب متوسط الخطأ المعياري $(S.E_{\hat{y}y})$ للقيمة المقدرة $\hat{y}_{15}=167$:

$$S.E_{y\hat{y}} = s_{y\hat{y}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_p-\bar{x})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}} \quad ;$$

$$\sigma_{y\hat{y}} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n-m-1}} = \sqrt{93,1} = 9,65$$

$$m_{y\hat{y}} = (S.E_{\hat{y}y}) = 9,65 \cdot \sqrt{\frac{1}{13}+\frac{64}{64}} = 6,32$$

المجال الذي تتراوح فيه y_{15} هو : $\hat{y}_{15} \pm [6,32 \cdot t_{tab}]$

$$t_{tab} = t_{(0,05)}(v_2) = t_{(0,05)}(10) = 2,228$$

إذن : $[\ \hat{y}_{15} \pm 14,1\ ]$

المجال هو: $152,9 < y_{15} < 181,1$ ، باحتمال كبير $= 0,95$.

بنفس الطريقة يمكن استخراج قيمة $(\hat{y}_{20})$.

– **مثال 10 :**

الجدول التالي (أنظر الصفحة الموالية) يعطي تطور متوسط أجر الفرد سنة 1995 في بلد ما،وأيضا نسبة ما يخصصه هذا الفرد للإنفاق على المواد الغذائية من مجمل دخله.

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار الذي يعبر عن العلاقة بين المؤشرين(x,y) في الحالات التالية:

معادلة الانحدار من الشكل: $\hat{y}_i = a + \frac{b}{x_i}$; $\hat{y}_i = a.b^{x_i}$

; $\hat{y}_i = a.\ x_i^{\ b}$; $\hat{y}_i = a + b.x_i$

2- تقييم كل نموذج عبر مقياس فيشر (F) ومتوسط خطأ التقريب ($\bar{A}$) .

المناطق	الإنفاق على المواد الغذائية من مجمل الإنفاق(%) : (y_i)	متوسط الأجر الفردي السنوي (x_i) : $(10^2\ \$)$
المنطقة1	68,8	45,1
المنطقة2	61,2	59
المنطقة 3	59,9	57,2
المنطقة 4	56,7	61,8
المنطقة 5	55	58,8
المنطقة6	54,3	47,2
المنطقة7	42,3	55,2

- الحـــل:

أ- في حالة ما إذا كان نموذج الانحدار الممثل للعلاقة (x, y) هو معادلة خط مستقيم: $\hat{y}_i = a + bx_i$.

من أجل حساب قيم معاملات هذه المعادلة يجب حل المعادلتين الطبيعيتين في(b, a) :

$$\begin{cases} n.a + b.\Sigma x_i = \Sigma y_i \\ a.\Sigma x_i + b.\Sigma x_i^2 = \Sigma(y_i .x_i) \end{cases}$$

- نقوم بإعداد الجدول التالي الذي يسمح بإعداد المقادير: Σx_i , Σy_i , $\Sigma x.y$, $\Sigma x_i^2 . y_i^2$

$$a = \bar{y} - b.\bar{x} = 57,89 + 0,35 \ . \ 54,9 = 76,88$$

$$b = \frac{\overline{x \times y} - \bar{y} \times \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{3166,05 - 57,89 \times 54,9}{3048,34 - (54,2)^2} = - 0,35$$

	y_i	x_i	$y_i.x_i$	x_i^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)$	A_i
1	68,8	45,1	3102,88	2034,01	4733,44	61,3	7,5	10,9
2	61,2	59	3610,8	3481	3745,44	56,5	4,5	7,7
3	59,9	57,2	3426,28	3271,84	3588,04	57,1	2,8	4,7
4	56,7	61,8	3504,06	3819,24	3214,89	55,5	1,2	2,1
5	55	58,8	3234	3457,44	3025	56,5	-1,5	2,7
6	54,3	47,2	2562,96	2227,84	2948,49	60,5	-6,2	11,4
7	49,3	55,2	2721,36	3047,04	2430,49	57,8	-8,5	17,2
Σ	405,2	384,3	22162,4	21338,4	23685,76	405,2	00	56,7
القيم المتوسطة	57,89	54,9	3166,05	3048,34	3383,68			8,1
σ	5,74	5,86						
σ^2	32,92	34,34						

معادلة نموذج الانحدار في هذه الحالة هي: $\hat{y}_i = 76,88 - 0,35x_i$

هذا يعني أن زيادة متوسط الأجر بـــ1$ تؤدي إلى انخفاض ما ينفقه الفرد على المواد الغذائية بـــ35%.

- تقيم جودة تمثيل هذا النموذج:

حساب معامل الارتباط (r_{xy}) : $r_{yx} = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_y \times \sigma_x} = - 0,36$

العلاقة بين (x,y) هي علاقة عكسية ضعيفة.

حساب معامل التحديد (R^2) : $R^2 = r^2 = (-0,36)^2 = 0,129$

قيمة معامل التحديد تدل على تمثيل سيئ لمعادلة المستقيم للعلاقة بين (x, y)، بحيث أن 12,9% فقط من التغيرات في (y) يسببها التغير في (x_i).

بعد تعويض قيم (x_i) في ($\hat{y}_i$) نحصل على القيم التقديرية لـــ ($\hat{y}_i$). ثم نحسب قيمة متوسط خطأ التقريب:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\,\Sigma A_i = \frac{1}{n}\Sigma\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i}\times 100$$

$$\bar{A} = \frac{0,567\times 100}{7} = 8,1\%$$

إذن القيم التقديرية تنحرف في المتوسط عن القيم الفعلية بـــ 8,1%.

- حساب مقياس فيشر (F):

$$F_{reel} = \frac{R}{1-R^2}\times\frac{n-m-1}{m} = \frac{0,129}{0,871}\times\frac{5}{1} = 0,74$$

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1, v_2) = F_{(0,05)}(1, 5) = 6,6$$

نلاحظ أن : $F_{tab} > F_{reel}$; ($6,61 > 0,74$)

إذن يجب قبول فرضية H_0 حول الطبيعة العشوائية لعلاقة (x, y) وعدم المعنوية الإحصائية لمعادلة التمثيل المقترحة وكذلك عدم موضوعية معامل التحديد R^2.

ب- تقدير وتقييم معادلة التمثيل في حالة : $\hat{y}_i = a.x_i^{\,b}$

قبل تقدير قيم معاملات هذا النموذج يجب إرجاع شكله الحالي إلى الشكل الخطي وذلك بأخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\log \hat{y}_i = \log a + b.\log x_i$$

أو : $\hat{Y}_i = A + b.X_i$

حيث: $\log x_i = X_i$; $\log a = A$; $\log \hat{y}_i = \hat{Y}_i$

ثم نقوم بحساب المقادير التي تمكننا من تقدير معاملات هذه المعادلة.

حساب معاملات المعادلة: $\hat{Y}_i = A + b.X_i$

$$b = \frac{\overline{X \times Y} - \overline{Y} \times \overline{X}}{\sigma_X^2} = \frac{3,0572 - 1,7605 \times 1,737}{(0,048)^2} \approx -0,298$$

$$A = \overline{Y}_i - b.\overline{X} = 1,76 + 0,298 \;.\; 1,737 = 2,278$$

معادلة نموذج الانحدار في هذه الحالة هي: $\hat{Y}_i = 2,278 - 0,298\ X_i$

والمعادلة التقديرية للشكل الأصلي تكون:

$$\hat{y}_i = 10^{2,278} \,.\, x^{-0,298} = 189,7 \,.x^{-0,298}$$

عند تعويض(x_i) بقيمها في هذه المعادلة نحصل على قيم ($\hat{y}_i$) التقديرية.

- تقييم فعالية تمثيل هذا النموذج :

حساب معامل الارتباط (ρ_{yx}) :

$$\rho_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{28,27}{32,92}} = 0,38$$

- معامل التحديد R^2 : $R^2 = \rho_{yx}^{\ 2} = (0,38)^2 = 0,1444$

وأيضا : $\bar{A} = 8\%$

- استخراج مقياس فيشر (F) :

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,1444}{1 - 0;1444} \times \frac{5}{1} = 0,84$$

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1 , v_2) = F_{(0,05)}(1 , 5) = 6,61$$

$F_{tab} > F_{reel}$; $(6,61 > 0,84)$: إذن

جـــ – تقدير وتقييم معادلة التمثيل في حالة : $\hat{y}_i = a.b^{x_i}$

نرجع أولا الشكل الحالي لهذه الدالة إلى الشكل الخطي وذلك بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\text{Log } \hat{y}_i = \log a + x_i .\log b$$

نضع : $\log b = B$; $\log a = A$; $\log \hat{y}_i = \hat{Y}_i$

فيصبح شكل الدالة السابقة كالتالي : $\hat{Y}_i = A + B.x_i$

نعد الجدول التالي الذي يسمح لنا بحساب معاملات هذه الدالة :

	Y_i	x_i	$Y_i.x_i$	Y_i^2	x_i^2	$\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$	A
1	1,84	45,1	82,88	3,38	2034	60,7	8,1	65,61	11,8
2	1,78	59	105,42	3,19	3481	56,4	4,8	23,04	7,8
3	1,78	57,2	101,67	3,16	3271,8	56,9	3	9	5
4	1,75	61,8	108,37	3,08	3819,24	55,5	1,2	1,44	2,1
5	1,74	58,8	102,34	3,03	3457,44	56,4	-1,4	1,96	2,5
6	1,73	47,2	81,88	3,01	2227,84	60	-5,7	32,49	10,5
7	1,69	55,2	93,44	2,87	3047	57,4	-8,2	67,24	16,6
Σ	12,32	384,2	675,99	21,71	21338,4	403,4	-1,8	200,78	56,3
القيم المتوسطة	1,761	54,9	96,5711		3048,34			28,68	8
σ	0,0425	5,86	–	–	–				
σ^2	0,0018	34,34	–	–	–				

- حساب معاملات نموذج الانحدار:

$$B = \frac{\overline{Y \times x} - \overline{Y} \times \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{96,5711 - 1,7605 \times 54,9}{3048,34 - 54,9^2} = -\ 0,0023$$

$$A = \overline{Y} - B\,.\overline{x} = 1,7605 + 0,0023.54,9 = 1,887$$

إذن الشكل الخطي لمعادلة التمثيل في هذه الحالة هو:

$$\hat{Y}_i = 1,887 - 0,0023x_i$$

أما شكلها الأصلي فيكون: $\hat{y}_i = 10^{1,887}\ .\ 10^{-0,0023.xi}$

$$\hat{y}_i = 77,1\ .0,9947^{xi}$$

حساب معامل الارتباط (ρ_{yx}):

$$P_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{\Sigma(y_i - \overline{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{200,68}{230,44}} = 0,36$$

هذه القيمة توضح أن العلاقة بين (x,y) هي علاقة طردية ضعيفة.

- حساب معامل التحديد (R^2):

$$R^2 = \rho_{yx}{}^2 = (\ 0,36\ )^2 = 0,1296$$

مقياس فيشر (F): هنا أيضا و كما في الحالة السابقة:

$$F_{reel} < F_{tab} \quad : \quad 0,74 < 6,61$$

في هذه الحالة والحالة السابقة، كما في الحالة (أ)، يجب أيضا قبول فرضية H_o حول الطبيعة العشوائية لعلاقة (x, y).فالمعادلة $\hat{y}_i = a.b^{xi}$ وأيضا المعادلة: $\hat{y}_i = a.x_i^b$ هما غير معنويتان إحصائيا، وأن معامل التحديد هو مقياس غير موضوعي في قياس مدى فعالية هذين المعادلتين

د- تقدير وتقييم نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين (x,y) إذا كان في شكل قطع زائد : $\hat{y}_i = a + \frac{b}{x_i}$.

نضع $Z = \frac{1}{x_i}$ ، فتأخذ الدالة الأصلية الشكل الجديد :

$\hat{y}_i = a + b.z_i$. نقوم بإعداد الجدول التالي:

- حساب معاملات معادلة التمثيل:

$$b = \frac{y\times z - z\times y}{\overline{z^2} - \bar{z}^2} = \frac{1,072 - 57,9\times 0,0184}{345\times 10^{-6} - (0,0184)^2} = 1051,4$$

	y_i	z_i	$y_i.z_i$	z_i^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)^2$	A_i
1	68,8	0,022	1,53	492.10^{-6}	4733,44	61,8	49	10,2
2	61,2	0,017	1,037	287.10^{-6}	3745,44	56,3	24	8
3	59,9	0,018	1,047	306.10^{-6}	3588	56,9	9	5
4	56,7	0,016	0,918	262.10^{-6}	3214,9	55,5	1,44	2,1
5	55	0,017	0,935	289.10^{-6}	3025	56,4	1,96	2,5
6	54,3	0,021	1,15	449.10^{-6}	2948,5	60,8	42,25	12
7	49,3	0,018	0,89	328.10^{-6}	2430,5	57,5	67,24	16,6
Σ	405,2	0,129	7,51	2413.10^{-6}	23685,8	405,2	194,9	56,5
القيم المتوسطة	57,9	0,018	1,072	345.10^{-6}	3383,7	-	27,84	8,1
σ	5,74	0,00215						
σ^2	32,95	0,000005						

$$a = \bar{y} - b\times\bar{z} = 57,9 - 1051,4.(0,0184) = 38,5$$

معادلة الانحدار في حالة القطع الزائد هي: $\hat{y}_i = 38,5 + 1051,4\ .z_i$ أو:

$$\hat{y}_i = 38,5 + 1051,4\ .\ \frac{1}{x_i}$$

- تقييم هذه المعادلة التمثيلية :

- حساب معامل الارتباط(ρ_{yx}):

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{194,9}{230,44}} = 0,3927$$

العلاقة الارتباطية بين (x,y) حسب هذا النموذج هي أقوى من غيرها من نماذج الانحدار السابقة.

- حساب معامل التحديد R^2 :

$$\bar{A} = 8,1\% \quad ; R^2 = \rho_{xy}{}^2 = (0,39)^2 = 0,1542$$

- حساب مقياس فيشر (F) :

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,15}{1-0,15} \times \frac{5}{1} = 0,91$$

$$F_{tab} = F_{(0,05)}(v_1 , v_2) = F_{(0,05)}(1 , 5) = 6,61$$

$$F_{reel} < F_{tab} \quad : (0,91 < 6,61)$$

وبالتالي فهنا أيضا في حالة معادلة القطع الزائد يجب قبول فرضية H_0، حيث نعتبر أن نموذج القطع الزائد هو غير معنوي إحصائيا وأنه لا يعبر عن العلاقة بين (x, y) تعبيرا موضوعيا.

في الخلاصة: نعتبر أن نموذج القطع الزائد مثل غيره من النماذج السابقة لا يمثل العلاقة بين متوسط أجر الفرد ونسبة ما ينفقه على التغذية أحسن تمثيل، نظرا لأن مقاييس التقييم الإحصائي (معامل الارتباط ، معامل التحديد ، مقياس فيشر) كلها تشير إلى ذلك. إن هذه النتيجة يمكن تفسيرها بضعف مستوى الارتباط بين المؤشرين محل الدراسة و كذلك بصغر حجم عينة المعطيات، بالإضافة إلى الأخطاء المرتكبة ربما في جمع هذه المعطيات.

مثـــال 11 :

في ما يلي معطيات عن متوسط الأجر اليومي والحد الأدنى المتوسط لمستوى معيشة الفرد في اليوم في عدة بلدان في سنة 2000.

البلد	الحد الأدنى المتوسط لمستوى معيشة الفرد في اليوم (x_i)	متوسط الأجر اليومي($) (y_i)
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159
12	115	173

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار الممثل لعلاقة المؤشرين المذكورين في حالة ما إذا كان في شكل معادلة مستقيم .

2- تقييم جودة التمثيل.

3- تقييم المعنوية الإحصائية لمعاملات النموذج الخطي المقدر.

4- إجراء عملية استطلاع وتقدير قيمة متوسط الأجر الفردي $(\hat{y}_p)$

عند الحد الأدنى للمعيشة $x_p = 107$% من المستوى المتوسط، ثم استخرج القيمة الفعلية لهذا الاستطلاع (قيمة y_p).

الحـــــل :

1- تقدير نموذج الانحدار الخطي المقترح :

من أجل حساب معاملات هذا النموذج نحضر الجدول الخاص بالمقادير التالية:

	x_i	y_i	$x_i.y_i$	x^2	y_i^2	$\hat{y}_i$	$(y_i-\hat{y}_i)$	A_i
1	78	133	10374	6084	17689	149	-16	12
2	82	148	12136	6724	21904	152	-4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	-23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
7	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
8	88	158	13904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1
11	76	159	12080	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	19929	183	-10	5,8
Σ	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,8
ق.المتوسطة	85,6	155,8	13484	7492,3	24531,4			5,7
σ	12,95	16,53						
σ^2	167,7	273,4						

$$b = \frac{\overline{x \times y} - \bar{y} \times \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{13484 - 85{,}6 \times 155{,}8}{7492{,}3 - (85{,}6)^2} = 0{,}92$$

$$a = \bar{y} - b.\bar{x} = 155{,}8 - 0{,}92 \,.\, 85{,}6 = 77$$

معادلة نموذج الانحدار المقدر هي : $\hat{y}_i = 77 + 0{,}92.x_i$

من معطيات هذه المعادلة يتضح أن ارتفاع الحد الأدنى لمتوسط معيشة الفرد بـــ 1$ يؤدي إلى ارتفاع متوسط الأجر اليومي للفرد بـــ 0,92$

2- دراسة متانة وقوة العلاقة الارتباطية بين (x,y) :

$$r_{xy} = \frac{\overline{x \times y} - \bar{x} \times \bar{y}}{\sigma_x \times \sigma_y} = b.\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}92 \,.\, \frac{12{,}95}{16{,}53} = 0{,}72$$

هذه النتيجة لمعامل الارتباط لبيرسون تدل على وجود علاقة ارتباطية ليست متينة و لكنها مقبولة، و أن طبيعة هذه العلاقة هي طردية. إن الضعف النسبي للعلاقة بين المؤشرين محل الدراسة يرجع إلى أسباب أخرى لم تؤخذ بعين الاعتبار عند دراسة هذه العلاقة (مثل مستوى التضخم ، مستوى الضرائب، تغير الدخل الوطني...الخ) ، أو غيرها مثل الأخطاء في أخذ العينات أو الحصول على البيانات الإحصائية بطريقة غير صحيحة.

- حساب معامل التحديد البسيط R^2:

$$R^2 = r_{xy}^{\ 2} = (0{,}72)^2 = 0{,}52$$

إن قيمة R^2 في هذه الحالة تدل على أن تمثيل العلاقة بين (x,y) من خلال المعادلة المقترحة يعتبر ذو فعالية ضعيفة وهي تؤكد نفس النتيجة التي توصلنا إليها من خلال مقياس معامل الارتباط (r_{xy}) .

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \times \Sigma A_i = \frac{68{,}9}{12} = 5{,}7\%$$

فعالية وجودة تمثيل معادلة الانحدار المقترحة تعتبر جيدة نظرا لأن $\bar{A}$ لا تتعدى حدود 8-10% المسموح بها. بما أن شكل الانتشار لقيم (x, y) لا يوحي بضرورة تمثيل العلاقة بينهما من خلال نموذج رياضي آخر، و بما أن قيمة مقياس متوسط خطأ التقريب $\bar{A}$ المحصل عليها

تعكس صحة تمثيل معادلة المستقيم للعلاقة بين المؤشرين المذكورين فنستطيع القول أن العلاقة بينهما ليست قوية لأن هناك عوامل أخرى محددة أو عشوائية تؤثر في المؤشر التابع (y) بالإضافة إلى المؤشر x_i لم تؤخذ بعين الاعتبار. زيادة على ذلك ربما تكون هناك أخطاء في جمع البيانات الإحصائية أو صغر حجم سلسلة المعطيات (صغر حجم العينة). إن ضعف تأثير x_i في y_i يعني أن الحد الأدنى لمستوى المعيشة لا يحدد وحده المسار الذي يأخذه متوسط الأجر اليومي: فحسب معامل التحديد (R^2) نسبة تأثير (x_i) على (y_i) هي 52% فقط أما الباقي (48%) فهي نسبة تأثير عوامل أخرى على المتغير التابع (y_i).

3- تقييم معاملات نموذج الانحدار المقترح :

إن إجراء هذا التقييم يختص بقياس المعنوية الإحصائية لتكوين معاملات النموذج المقدر. إنجاز هذه العملية، كما أشرنا سابقا، يتم بواسطة حساب مقياس ستيودنت (t) لكل معامل ثم إجراء الاختبار H_0 حول الطبيعة العشوائية أو الموضوعية لتكوين معاملات النموذج المقترح.

$$t_a = a \,/\, \text{قيمة الخطأ المعياري ل } a = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-\text{m}-1} \times \dfrac{\Sigma x_i^2}{n.\Sigma(x_i-\overline{x})^2}}}$$

$$t_a = \frac{77}{12,6 \times \dfrac{\sqrt{89907}}{12 \times 12,95}} = \frac{77}{24,3} = 3,2$$

$$t_b = b \,/\, \text{قيمة الخطأ المعياري ل} b = \frac{b}{\sqrt{\dfrac{\Sigma(y_i-\hat{y}_\text{i})^2 / n-\text{m}-1}{\Sigma(x_i-\overline{x})^2}}}$$

$$t_b = \frac{0{,}92}{12{,}6 \ \div (12{,}95 \times \sqrt{12}\ )} = \frac{0{,}92}{0{,}281} = 3{,}3$$

نقارن القيم الفعلية (المحسوبة) بالقيم الجدولية (القيم الحرجة) لمقياس ستيودنت (t) عند درجات حرية عددها $V_2 = n\text{-}m\text{-}1$ مستوى معنوية $\alpha = 0{,}05$.

$$t_a = 3{,}2 > t_{tab} = 2{,}26 \quad ; \quad t_b = 3{,}3 > t_{tab} = 2{,}26$$

هذه المقارنة تسمح لنا برفض اختبار فرضية H_0 حول الطبيعة العشوائية لتكوين هذه المعاملات. فهذه المعاملات هي ذات طبيعة موضوعية وتتمتع بمعنوية إحصائية.

4- الصيغة المقدرة لنموذج الانحدار المحصل عليه تسمح بإجراء الاستطلاع. إذا زاد مستوى الحد الأدنى للمعيشة بـــ107% عن مستواه المتوسط فتكون قيمته هي x_p:

$$x_p = \overline{x} \ . \ 1{,}07 = 85{,}6 \ . \ 1{,}07 = 91{,}6 \ \$$$

عند هذا المستوى لـــ x_p تكون قيمة الأجر المتوسط اليومي($\hat{y}_p$) هي:

$$\hat{y}_p = 77 + 0{,}92 \ . \ 91{,}6 = 161 \ \$$$

الخطأ المعياري للقيمة المقدرة $\hat{y}_p$ (خطأ الاستطلاع) في هذه الحالة يكون:

$$S.E_{\hat{y}p} = s_{y\hat{y}} \ . \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \overline{x})^2}{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}}$$

$$s_{y\hat{y}} = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - \hat{y}\ )^2}{n - m - 1}} = \sqrt{\frac{1600}{10}} = 12{,}65$$

$$S.E_{\hat{y}p} = 12{,}65 \ . \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{(91{,}6 - 85{,}6\ )^2}{2012{,}4}} = 12{,}65 \ . \ 0{,}32 = 4\$$$

إذن مجال الاستطلاع الذي يمكن أن تتراوح فيه القيمة الفعلية لمتوسط الأجر اليومي (y_p) باحتمال 95% هو:

$$\Delta_{\hat{y}p} = [\, m_{\hat{y}} \,.\, t_{tab} \,] = [\; 4 \,.\, 2{,}228 \,] = 8{,}9$$

$$161 + 8{,}9 < y_p < 161 - 8{,}9$$

$$169{,}9 < y_p < 152{,}1$$

من هنا فإنه إذا زاد الحد الأدنى لمستوى معيشة الفرد وأصبحت قيمة x_p = 91,6 $ فإن القيمة الفعلية للأجر الفردي المتوسط ستزيد وتتراوح في حدود المجال المشار إليه أعلاه باحتمال 95%.

- مثال 12 :

لدى مجموعة من المؤسسات ، تمارس نشاطها في نفس القطاع وتنتج سلع متشابهة، معلوم علاقة تبعية تكلفة الوحدة المنتجة من السلعة (y_i) لمجموعة من العوامل (x_i) الواردة في الجدول أدناه .

القيمة المتوسطة للعنصر المؤثر($\bar{x}$)	نموذج الانحدار الممثل للعلاقة المعنية	العوامل المؤثرة
$\bar{x}_1 = 2{,}64$	$\hat{y}_{x1} = 0{,}62 + 58{,}74 \,.\, \frac{1}{x_i}$	حجم الإنتاج(مليون$) x_1
$\bar{x}_2 = 1{,}38$	$\hat{y}_{x2} = 9{,}3 + 9{,}38x_2$	حجم قوة العمل المستعملة في إنتاج الوحدة (س.ع) x_2
$\bar{x}_3 = 1{,}503$	$\hat{y}_{x3} = 11{,}75 \,.\, x_3^{1{,}6281}$	سعر الجملة لكل 1 طن من عنصر الطاقة مليون $) المستعملة x_3
$\bar{x}_4 = 26{,}3$	$\hat{y}_{x4} = 14{,}87 . 1{,}016^{x4}$	نسبة الضريبة على الأرباح x_4 :(%)

المطلوب:

1- حدد بالاستعانة بمعاملات المرونة درجة تأثير كل عامل(x_i) من العوامل السابقة على تكلفة الوحدة المنتجة من السلعة (y_i).

2 - رتب هذه العوامل حسب درجة تأثيرها على التكلفة (y_i) للسلعة المنتجة.

الحــــــل :

1- تحديد درجة تأثير كل عنصر باستعمال متوسط معامل المرونة $\bar{E}$:

- بالنسبة للعنصر الأول:

$$\bar{E}_{(x_1)} = f'_{(x_1)} \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = -\frac{b}{\bar{x}_1^2} \cdot \frac{\bar{x}_1}{a+b/\bar{x}_1} =$$

$$= \frac{-b}{a.\bar{x}_1 + b} = \frac{-58,74}{0,62\,.\,2,64 + 58,74} = -\,0,973\%$$

- بالنسبة للعنصر الثاني :

$$\bar{E}_{(x_2)} = f'_{(x_2)} \cdot . \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = \frac{b\,.\,\bar{x}_2}{a + b\,.\,\bar{x}_2} = \frac{9,83\,.\,1,38}{9,3 + 9,83\,.\,1,38} = 0,59\%$$

- العنصر الثالث :

$$\bar{E}_{(x_3)} = f'_{(x_3)} \cdot \frac{\bar{x}_3}{\bar{y}} = a\,.\,b\,.\,\bar{x}_3^{b-1} \cdot \frac{\bar{x}_3}{a\,.\,\bar{x}_3^{b}} = b = 1,63\%$$

- العامل الرابع :

$$\bar{E}_{x4} = f'_{(x_4)} \cdot \frac{\bar{x}_4}{\bar{y}} = a\,.\,b^{\bar{x}4}\,.\ln b\,.\frac{\bar{x}_4}{a\,.\,b^{\bar{x}4}} = \ln.b \times \bar{x}_4 =$$

$$= \ln.\ 1,016\ .(\ 26,3) = 0,42\%$$

2- ترتيب هذه العوامل حسب درجة تأثيرها على (y_i) :

عند مقارنة معاملات المرونة $(\bar{E}_{xi})$ نستطيع ترتيب العناصر (x_i) حسب درجة تأثيرها على تكلفة الوحدة المنتجة من السلعة.

أ- $\bar{E}_{x3} = 1,63\%$ ؛ ب- $\bar{E}_{x2} = 0,59\%$ ؛ ج- $\bar{E}_{x4} = 0,42\%$ ؛

د- $\bar{E}_{x1} = - 0,97\%$

نستنتج من ذلك أن أكبر تأثير على زيادة تكلفة الوحدة المنتجة، في عينة المؤسسات المدروسة، يسببه أسعار الطاقة المستعملة وبدرجة أقل بكثير اليد العاملة و بعدها نسبة الضرائب المدفوعة على الأرباح. أما العامل الأول (حجم الإنتاج) فيؤثر تأثيرا إيجابيا على التكاليف، بحيث أن زيادة كمية الإنتاج بـــ1% من قيمته المتوسطة تؤدي إلى انخفاض تكلفة الوحدة المنتجة بــــ:0,97% عن قيمتها المتوسطة.

I - 3 - تمارين :

تمرين 1 :

لتكن نماذج الانحدار البسيطة التالية:

$$y_i = a + b.x_i^3+\varepsilon \; ; \; y_i = a + b.\ln x_i + \varepsilon \; ; \; \ln.y_i = a + b.\ln x_i +\varepsilon$$

$$y_i = a + bx_i^c +\varepsilon \; ; \; y_i = 1+ a.(1- x^b) + \varepsilon \; ; \; y_i = a+ b. \frac{x_i}{10} + \varepsilon$$

$$y_i^a = b + cx_i^2 +\varepsilon \; ;$$

المطلــوب:

حدد ما يلي:

1 - نماذج الانحدار الخطية بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

2 - نماذج الانحدار الخطية بالنسبة لمعاملات المتغيرات المستقلة.

3 - نماذج الانحدار غير الخطية لا بالنسبة للمعاملات ولا بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

تمــرين- 2:

عند دراسة الطلب على أجهزة التلفزيون من نوع (n) باستخدام المعطيات المحصل عليها في 19 نقطة بيع تابعة لمؤسسة " دلــتــا "، حدد قسم التحليل والبرمجة لهذه المؤسسة نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين الكمية المطلوبة من التلفزيون و ثمنه كالتالي:

$\ln \hat{y}_i = 105 - 0,8 \ln x_i$ مع العلم أن القيم الفعلية لمقياس ستيودنت (t) لمعاملات معادلة الانحدار هي: $t_a = 2,5 \; ; \; t_b = -4$

حيث أن : $\hat{y}_i$ – عدد أجهزة التلفزيون المباعة من النوع (n) في كل نقطة بيع.

x_i – الثمن المتوسط للتلفزيون في نقطة البيع المعنية.

المطلـــوب:

قبل إجراء الدراسة افترضت إدارة المؤسسة " دلـــتـــا " أن مرونة الطلب على التلفزيون بالنسبة لثمنه تبلغ (- 0,9). هل أكدت نتائج الدراسة افتراض الإدارة .

تمـــرين 3 :

نماذج تبعية التكاليف الثابتة $(\hat{y}_i)$ لحجم الإنتاج x_i لثلاث أنواع من السلع (A,B,C) كانت كالتالي:

$$\hat{y}_A = 600 \quad ; \quad \hat{y}_B = 80 + 0{,}7x_i \quad ; \quad \hat{y}_C = 40\, x_i^{0{,}5}$$

المطلـــوب:

1- حساب متوسط معامل المرونة ($\bar{E}$) لكل نوع من المنتجات الثلاثة وتوضيح معناه.

2- عند مستوى الإنتاج $x_i = 1000$ ، قارن بين مرونة التكاليف الثابتة، للمنتجين C,B .

3 - حدد ما هو حجم الإنتاج الذي يجعل معاملي المرونة للمنتجين (C,B) متساويين.

تمريـــن 4 :

تتأثر الكمية المستهلكة (y_i) من سلعة ما بالكمية المنتجة منها (x_i). بعد دراسة 20 مشاهدة تم التوصل إلى احتمالات نماذج الانحدار التالية التي تمثل العلاقة بينهما:

1 - $\hat{y}_i = 3 + 2x_i \; ; \; (t_b = 6{,}48)$

2- $\ln \hat{y}_i = 2{,}5 + 0{,}2.\ln x_i \; ; \; (t_b = 6{,}19) \, , \, (R^2 = 0{,}68)$

3 - $\ln \hat{Y} = 1{,}1 + 0{,}8.\ln X \; ; \; (t_b = 6{,}2) \, , \, (R^2 = 0{,}69)$

-4 $\hat{Y}_i = 3 + 1,5X_i + 0,1X_i^2$; $(t_b = 3)$, $(t_c = 2,65)$,
$(R^2 = 0,701)$

بين قوسين معطاة القيم الفعلية لمقياس ستيودنت (t_{reel}) لمعاملات الانحدار وقيم معاملات التحديد (R^2).

المطلـــوب:

1- احسب قيمة معامل التحديد البسيط لمعادلة الانحدار الأولى.

2- اكتب معادلات الانحدار الممثلة للعلاقة الأصلية بين (x,y) في المعادلتين الثانية والثالثة.

3 حدد معامل المرونة $(\bar{E})$ لكل معادلة.

4- اختبر أحسن نموذج انحدار من بين المعادلات السابقة.

تمـــرين 5 :

علاقة الإنتاجية المتوسطة الشهرية بزيادة عدد العمال يمثلها نموذج الانحدار التالي : $y_i = a + b.x_i + cx_i^2 + \varepsilon$.

استعمال هذا النموذج أعطى النتائج المبينة في الجدول أدناه:

عدد العمال (x_i)	إنتاجية العمل(مليون.دج)		عدد العمال (x_i)	إنتاجية العمل	
	الفعلية(y_i)	التقديرية $\hat{y}_i$		الفعلية(y_i)	التقديرية$\hat{y}_i$
1	12	10	6	11	12
2	8	10	7	12	13
3	13	13	8	9	10
4	15	14	9	11	10
5	16	15	10	9	9

المطلوب: تقييم جودة تمثيل هذا النموذج من خلال:
متوسط خطأ التقريب $(\bar{A})$، معامل الارتباط (ρ_{xy})، معامل التحديد (R^2) ومقياس فيشر (F).

تمرين 6:

إن نمذجة أرباح مؤسسة ما حسب نموذج الانحدار $(\hat{y}_i = a.b^{x_i})$ أعطى النتائج الممثلة في الجدول التالي:

أرباح المؤسسة		المتغير (x_i)	أرباح المؤسسة (مليون دج)		المتغير (x_i)
التقديرية $\hat{y}_i$	الفعلية y_i		التقديرية $\hat{y}_i$	الفعلية (y_i)	
20	18	5	11	10	1
11	11	6	11	12	2
14	13	7	17	15	3
16	19	8	15	17	4

المطلوب: تقييم نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين(x, y) من خلال:
1 - متوسط خطأ التقريب $(\bar{A})$
2 - دراسة قوة و متانة ارتباط مؤشر الأرباح (yi) بالمؤشر المستقل(xi).
3- مقياس فيشر(F).

تمـــرين 7:

لدينا معادلة الانحدار التالية $\hat{y}_i = ax^b$:

بعد تحويل هذه المعادلة إلى شكلها الخطي تم الحصول على قيم المتغيرات اللوغاريتمية كالتالي:

$$\Sigma Y_i.X_i = 4,2087 \quad ; \quad \Sigma X_i = 8,237$$
$$\Sigma X_i^2 = 9,2334 \quad ; \quad \Sigma Y_i = 3,931$$
$$\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = 0,0014 \quad ; \quad \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 0,72$$

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار المقترح .

2- أوجد معامل الارتباط و معامل التحديد علما بأن $n = 9$.

تمـــرين 8:

تبعية الكميات المنتجة (y_i) من سلعة ما لعدد العمال (x_i) في 15 ورشة تابعة لمؤسسة ما، ممثلة بمعادلة الانحدار التالية:

$$\hat{y}_i = 30 - 0{,}04x_i + 0{,}4x_i^2$$

نسبة التشتت الناتجة عن الأخطاء الإحصائية $\left(\frac{\Sigma(y_i-\hat{y})^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}\right)$ من مجموع تشتت المتغير(y_i) تساوي 20%

المطلـــوب:

1- تحديد معامل الارتباط (ρ_{yx})

2- تقييم معادلة الانحدار المقترحة.

3 -حساب معامل المرونة ($\bar{E}$) إذا كان مجموع عدد العمال =30.

تمرين 9:

لتكن معادلة الانحدار التالية ($\hat{y}_i = 20 + \frac{20}{x_i}$) التي تمثل علاقة تكاليف الإنتاج (y_i)بقيمة الأصول الإنتاجية

الثابتة (x_i) في 10 مصانع تنتمي إلى نفس القطاع. نسبة التشتت الناتجة عن الأخطاء الإحصائية=0,19 .

المطلوب:

1- حساب معامل المرونة بافتراض أن القيمة المتوسطة للأصول الإنتاجية الثابتة =200 ألف$.

2- حساب معامل الارتباط.

3- تقييم النموذج السابق من خلال مقياس فيشر.

تمريـــن 10:

تبعية الكمية المطلوبة (y_i) من سلعة ما إلى ثمنها (x_i) حسب 20 مشاهدة، تمثلها معادلة الانحدار التالية:

$(\log \hat{y}_i = 1,75 - 0,35 \log x_i)$. نسبة التشتت الناتجة عن الأخطاء الإحصائية = 18%.

المطلوب:

1- كتابة معادلة الانحدار السابقة في شكلها الأصلي المناسب.

2- تقييم مرونة الطلب بالنسبة إلى الثمن .

3 -تقييم معادلة الانحدار المعطاة.

تمـــرين 11:

المعطيات الخاصة بنشاط 20 مزرعة فلاحية فردية سمحت بالحصول على المعلومات التالية المتعلقة بعلاقة إنتاجية العمل (y_i) وكمية الأسمدة المستعملة في الهكتار الواحد(x_i). متوسط الإنتاجية $\overline{y_i}$ =20 قنطار/هكتار، متوسط كمية الأسمدة $\overline{x_i}$ = 5 كغ /هـــ .

إذا علمت أن متوسط معامل المرونة $\bar{E}$ = 0,75 ، القيمة الفعلية لمقياس فيشر F_{reel} = 45 .

المطلـــوب:

1 -كون معادلة الانحدار الخطية الممثلة للعلاقة بين إنتاجية العمل(y_i) وكمية الأسمدة المستعملة في الإنتاج(x_i)

2 – احسب معامل التحديد .

3- أجر تقييما لموضوعية معادلة الانحدار و معامل التحديد .

تمـــرين 12 :

علاقة قيمة النفقات (y_i) في مؤسسة ما بكمية الإنتاج (x_i) لمنتجين (B,A) ممثلة بالمعلومات التالية :

عدد المشاهدات	معامل الارتباط	معادلة الانحدار
30	0,85	$\hat{y}_A=160 + 0,8x_i$
25	0,72	$\hat{y}_B= 50x_i^{0,6}$

المطلوب:

1 - فسر معنى القيم(0,6) و (0,8) .

2- قارن بين مرونة النفقات (y_i) بالنسبة لكمية الإنتاج (x_i) للمنتجين A,B ، إذا كانت كمية الإنتاج المتوسطة $(\bar{x}_A)$ للمنتج A = 500 وحدة .

3 -كم يجب أن تكون كمية الإنتاج من المنتج (A) حتى تتساوى مرونة نفقاته مع مرونة نفقات المنتج (B)

4- أجر تقييما إحصائيا لكل معادلة من المعادلتين السابقتين عن طريق مقياس فيشر .

تمريـــن 13 :

علاقة قيمة المبيعات (y_i) بالنفقات على الإشهار (x_i)في 12 مؤسسة تابعة لهولدينغ ما ميزها المعطيات التالية:

تباين قيم المبيعات (σ_y)	تباين قيم الإشهار (σ_x)	معادلة الانحدار(x, y)
3,4	4,7	$\hat{y}_i = 10,6 + 0,6\ x_i$

المطلوب:

إجراء تقييم إحصائي شامل لنموذج الانحدار المقدر السابق .

تمرين 14 :

نريد دراسة علاقة تكلفة الإنتاج (y_i) بالكميات المنتجة (x_i) من سلعة ما في 10 مصانع تنتمي إلى نفس المؤسسة:

المؤشر / المصنع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تكلفة الوحدة المنتجة(أ.د.)	9	6	5	4	3,7	3,6	3,5	6	7	3,5
الكمية المنتجة من السلعة (ألف وحدة)	100	200	300	400	500	600	700	150	120	250

المطلوب :

1-إذا كان نموذج الانحدار الممثل للعلاقة (y_i ,x_i)في شكل :

$\hat{y}_i = a + \frac{b}{x_i}$ ، قدر هذه المعادلة الانحدارية .

2- قيم معادلة هذا النموذج إحصائيا .

3- احسب معامل المرونة ($\bar{E}$) .

أجب على الأسئلة التالية مستعملا معطيات التمارين من 15إلى 22:

1- ارسم شكل انتشار القيم (x, y) وحدد نوع معادلة الانحدار الممثلة للعلاقة المدروسة.

2-قدر معاملات نموذج الانحدار في حالة ما إذا كانت معادلة كالتالي:

$$\hat{y}_i = a + bx_i \quad ; \quad \hat{y}_i = a + \frac{b}{x_i} \quad ; \quad \hat{y}_i = a.x_i^{b}$$
$$\hat{y}_i = a + b.\log x_i \quad ;$$

3- قيم متانة العلاقة الارتباطية وجودة التمثيل باستعمال معامل الارتباط ، معامل التحديد ، و متوسط خطأ التقريب $(\bar{A})$.

4 - أعطي تقييما للمعنوية الإحصائية للنماذج السابقة مستعملا مقياس فيشرF، ما هي في رأيك المعادلة الأحسن تمثيلا للعلاقة بين (y_i,x_i) .

6 - احسب القيمة الاستطلاعية (التقديرية) $(\hat{y}_p)$ إذا ما ارتفعت قيمة (x_p) بـــ 10% , 8% ,5%, من قيمته المتوسطة. ثم حدد مجال الثقة الذي تتراوح فيه القيمة الفعلية (y_p) عند المستويات المختلفة لـــ (x_p).

تمريـــن 15:

الجدول التالي يورد المعطيات الخاصة بالنسبة المئوية لمتوسط ما يدخره الفرد (y_i) في سنة 1995 في بلد ما، من مجمل دخله الشهري (x_i) لـــ 11 فئة اجتماعية.

الفئة الاجتماعية	% (y_i)نسبة المدخرات	قيمة الدخل الشهري (x_i) (\$10)
الأولى	6,9	289
الثانية	8,7	334
الثالثة	6,4	300
الرابعة	8,4	343
الخامسة	6,1	356
السادسة	9,4	289
السابعة	11	341
الثامنة	6,4	327
التاسعة	9,3	357
العاشرة	8,2	352
الحادية عشر	8,6	381

تمرين 16 :

المعطيات الواردة في الجدول التالي خاصة بقيمة منح المتقاعدين(y_i) في 13 منطقة من بلد ما في سنة 1998 وأيضا مستوى الحد الأدنى لمعيشة الفرد (x_i) في هذا البلد.

المنطقة	متوسط الشهرية المنحة $10:$(y_i)$	الحد الأدنى لمستوى معيشة الفرد $10:$(x_i)$	المنطقة	متوسط المنحة الشهرية $10:$(y_i)$	الحد الأدنى لمستوى معيشة الفرد $10: (x_i)
1	240	178	8	232	166
2	226	202	9	215	190
3	221	197	10	220	180
4	226	201	11	222	181
5	220	189	12	231	186
6	250	302	13	229	250
7	237	215			

تمريـــن 17 :

لتكن المعطيات التالية الخاصة بتطور ظاهرتين (y,x) كما في الجدول التالي:

رقم المشاهدة	y_i	x_i	رقم المشاهدة	y_i	x_i
1	615	289	9	704	314
2	727	338	10	780	304
3	584	287	11	30	341
4	735	324	12	554	364
5	707	307	13	560	342
6	657	304	14	545	310
7	654	307	15	672	411
8	693	290	16	796	304

تمرين 18 :

في الجدول التالي نورد معطيات خاصة بمتوسط استهلاك الفرد (y_i)و متوسط دخله (x_i) في عينة من 17 عائلة.

رقم المشاهدة	النفقات على الاستهلاك $10\$:(y_i)$	قيمة متوسط الدخل الفردي $10\$: (x_i)$	رقم المشاهدة	النفقات على الاستهلاك $10\$:(y_i)$	قيمة متوسط الدخل الفردي $10\$: (x_i)$
1	302	554	10	403	577
2	360	560	11	208	584
3	310	545	12	462	949
4	415	672	13	368	888
5	452	796	14	399	831
6	502	777	15	342	562
7	355	632	16	354	665
8	416	688	17	558	705
9	501	833			

تمريـــن19: لتكن سلسلة المعطيات التالية الخاصة بتغير ظاهرتين (x, y) كالتالي:

رقم المشاهدة	y_i	x_i	رقم المشاهدة	y_i	x_i
1	596	913	11	409	540
2	417	1095	12	452	682
3	354	606	13	367	537
4	526	876	14	328	589
5	934	1314	15	460	626
6	412	593	16	380	521
7	525	754	17	439	626
8	367	528	18	344	521
9	364	520	19	401	658
10	336	539	20	514	746

تمرين 20 :

لتكن المعطيات التالية الخاصة بقيمة الدخل الوطني لدولة ما في الفترة 85- 2000 وقيمة ما تخصصه هذه الدولة للإنفاق على القطاعات الاجتماعية في نفس الفترة .

السنوات	الإنفاق الاجتماعي y_i (مليار$)	الدخل الوطني x_i (مليار$)
85	1,16	5,24
86	1,22	3,71
87	2,00	4,53
88	4,26	10,06
89	3,46	9,97
90	0,78	2,17
91	1,64	4,86
92	10,9	19,89
93	2,65	5,95
94	11,04	15,50
95	2,95	9,37
96	2,19	7,61
97	2,63	7,67
98	8,59	17,2
99	10,28	17,35
2000	4,95	10,52

تمرين 21 :

الجدول التالي يتضمن سلسلة معطيات خاصة بتطور المؤشرين y_i,x_i .

المشاهدة	y_i	x_i
1	461	632
2	524	738
3	298	515
4	351	640
5	624	942
6	584	888
7	425	704
8	277	603
9	321	439
10	573	985
11	576	735
12	588	760
13	497	830
14	863	2093

تمريـــن 22 :

نفترض القيم التالية المتعلقة بتغير ظاهرتين (x,y) كالتالي:

x_i	y_i	رقم المشاهدة	x_i	y_i	رقم المشاهدة
682	277	8	912	461	1
697	321	9	809	524	2
1251	573	10	748	289	3
967	576	11	47	351	4
898	588	12	1087	624	5
1263	497	13	1074	584	6
3027	863	14	1008	425	7

تمريـــن 23 :

البيانات التالية تمثل سلسلة معطيات خاصة بتطور متغيرين كالتالي:

180	140	185	140	130	105	115	60	65	40	45	20	y
60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	x

المطلوب:

1- حدد معادلة الانحدار التي تمثل العلاقة بين (x,y) .

2- احسب معاملات هذه المعادلة .

3- أجر تقييما لهذه المعادلة المقدرة .

اجب على هذه الأسئلة في الحالتين التاليتين:

- معادلة الانحدار هي خط مستقيم.
- معادلة الانحدار هي معادلة لوغاريتمية من الشكل: $\hat{y}_i = a + b \log x_i$.
- اختر أحسنهما تمثيلا للعلاقة (x, y) .

تمريـــن 24 :

لتكن سلسلة المعطيات الممثلة للمؤشرين التاليين :

y	100	200	150	270	360	330	440
x	0	20	10	30	40	50	60
y	450	540	510	570	620	700	
x	70	80	90	100	110	120	

المطلوب:

1 -إجراء تقدير لمعادلة الانحدار .

2- تقييم هذه المعادلة .

في حالة معادلة خط مستقيم و أيضا في حالة معادلة من الشكل:

$\hat{y}_i = ax^{b}_i$ ثم اختر أحسنهما .

تمريـــن 25 :

تؤدي زيادة الضريبة على الأرباح على سلعة ما إلى انخفاض الكمية المعروضة منها كالتالي :

الكمية المعروضة (ألف طن)	قيمة الضريبة (ألف دينار)	الكمية المعروضة (ألف طن)	قيمة الضريبة (ألف دينار)
300	0	120	36
275	6	104	40
245	10	66	46
220	16	50	50
210	20	16	56
160	26	4	60
150	30		

المطلوب:

1- إجراء تقدير لمعادلة الانحدار الممثلة للعلاقة بين المؤشرين المذكورين إذا كانت في شكل خط مستقيم و أيضا في شكل قطع زائد .

2- أجري تقييما لفعالية تمثيل كلا النموذجين من خلال متوسط خطأ التقريب ($\bar{A}$) وأيضا اختبار فيشر(F)

تمرين 26 :

الجدول التالي يعطي تغير الكمية المطلوبة من سلعة ما كنتيجة لتغير ثمنها (مع افتراض بقاء العوامل الأخرى المؤثرة على الطلب ثابتة) .

الثمن (بمئات الدنانير	الكمية المطلوبة (بالطن)	الثمن (بمئات الدنانير)	الكمية المطلوبة (بالطن)
40	452	120	416,6
50	438	130	416,4
60	433,4	140	415,3
70	425,6	150	412,3
80	425	160	411
90	424,3	170	413,3
100	421	180	411,1
110	417,2		

المطلوب :

الاتجاه العام لشكل انتشار أزواج القيم (y, x) يشبه مستقيم وأيضا قطع زائد. أي النموذجين في رأيك أحسن تمثيلا للعلاقة بين المؤشرين محل الدراسة.

تمـــرين 27:

لديك المعطيات التالية الخاصة بتغير قيم مؤشرين (x, y) كالتالي:

x	1	2	3	4	4,67	5	6	7	8
y	20	70	172	172	197,18	206	200	140	112
X	9	10	11	12	13	14	15		
y	80	30	8	10	20	40	120		

المطلوب:

1- تكوين نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين هذين المؤشرين.

2 -احسب معاملات نموذج الانحدار الذي تقترحه.

3 - أجر تقييما إحصائيا شاملا لفعالية تمثيل هذا النموذج.

تمـــرين 28:

لتكن سلسلة المعطيات التالية:

قيمةx	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
قيمةy	9,5	9	16,5	1	21	21	18	17	18	10	5	4

المطلوب:

أجب على نفس أسئلة التمرين السابق.

تمرين 29:

المعطيات التالية تتعلق بتطور الظاهرتين(x, y) كالتالي :

x	14	15	16	17	18	19	20
y	509	445	529	481	676	489	520
x	21	22	23	24	25	26	27
y	469	556	551	484	475	484	471

المطلوب:

أجب على نفس أسئلة التمرين السابق.

تمـــرين 30:

لدينا البيانات التالية الخاصة بتطور ظاهرتين (x, y) كالتالي:

x	20	25	30	35	40	45	50	55	60
y	5,1	9,9	16,86	16,2	17,1	23,46	24,95	25	26,9
x	65	70	75	80	85	90	95	100	
y	33,65	33,26	33,75	34,16	34,47	39,7	39,89	40	

المطلوب:

1- تحديد طبيعة نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين(x, y).

2- تقييم فعالية هذا النموذج حسب مقياس فيشر.

3- تحديد جودة الأداء العام لهذا النموذج.

تمرين 31:

لتكن سلسلة البيانات التالية :

x	0,2	0,4	0,6	,08	1	1,2	1,4	1,6	1,8
y	86	88	93,65	101,1	102	102,58	102,98	103,1	106, 11
x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6
y	108	104,8	104,6	108,3	111,95	110,54	113,1	109,63	109,13

المطلوب: أجب على نفس أسئلة التمرين السابق .

تمرين 32 :

البيانات التالية توضح المبالغ التي تنفقها مؤسسة تجارية ما على الإشهار والإعلان ورقم أعمالها الناتج عن بيع مجموعة من السلع كالتالي:

مبلغ الإشهار بالألف دينار	1	2	3	4	5	6	7	8
قيمة المبيعات بالمليون.دج	2	6	5,77	8	6,99	10,78	11,45	11,03
مبلغ الاشهار بالألف دينار	9	10	11	12	13	14	15	16
قيمة المبيعات بالمليون دينار	11,04	13, 5	12,42	12,79	14,1	12,46	13,76	14,04

المطلوب :

1- تحديد نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين (x, y) .

2- تقدير معاملات هذا النموذج .

3 -تقييم فعالية و موضوعية تمثيل هذا النموذج .

تمرين 33:

لتكن سلسلة المعطيات التالية المعبرة عن تطور قيم ظاهرتين(x, y) كالتالي:

x	10	12	14	16	18	20	22	24
y	305	325	350,8	69,99	379,58	395,31	410,73	421,1
x	26	28	30	32	34	36	38	
y	427,5	436,15	448,14	461,55	463,45	470,89	475,94	

المطلوب :

1 - ارسم شكل انتشار القيم المعطاة .

2 - قدر نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين (x, y)وقيمه إحصائيا في الحالتين التاليتين:

- حالة معادلة مستقيم متزايد $y_i = a + b.x_i + \varepsilon$
- حالة معادلة لوغاريتمية من الشكل $y_i = a + b.\log x_i + \varepsilon$

ثم اختر أحسنهما تمثيلا.

تمرين 34 :

العلاقة بين ثمن سلعة ما (x_i) والكمية المطلوبة منها (y_i) معطاة في سلسلة البيانات التالية:

y	x	y	x
68	100	90	20
65,4	108	83,57	28
67,9	116	83,23	36
66,95	124	82,18	44
64,6	132	80,38	52
65,72	140	77,34	60
63,4	148	71,77	68
66,13	156	71,53	76
65,88	164	70,52	84
64,65	172	69,69	92

المطلوب:

1- تقدير وتقييم نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين ثمن السلعة المذكورة والكمية المعروضة منها في الحالتين التاليتين:

- حالة معادلة مستقيم متناقص
- حالة معادلة قطع زائد .

2 - اختر أي النموذجين أحسن تمثيلا للعلاقة السابقة .

تمــــرين 35 :

المعطيات التالية خاصة بتطور المتغير التابع (y) والمتغير المستقل(x_i):

x	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
y	68	64,67	48	45	48,12	37	34,46	35,34	36,54
x	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	
y	30	29,67	29,5	30,47	25,56	25,74	27	23,34	

المطلوب:

تقدير وتقييم نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين المتغيرين (x, y) .

الفصل الثاني
نموذج الانحدار المتعدد

II–1 تذكير بأهم القواعد النظرية:

II-1–1 تقدير نموذج الانحدار المتعدد:

إن الانحدار البسيط يمكن أن يعطي نتائج جيدة في ميدان النمذجة إذا كانت الدراسة تشمل تأثير عامل مستقل واحد على الظاهرة المدروسة ويكون بالإمكان التغاضي أو إهمال تأثير العوامل الأخرى على هذه الظاهرة. مثال ذلك عندما يريد الباحث تكوين نموذج لعلاقة الإنفاق الاستهلاكي على سلعة ما بمستوى الدخل فإنه يلجأ إلى افتراض أنه في كل مجموعات الدخل يكون تأثير بعض العوامل الأخرى كثمن السلعة، أذواق المستهلكين عدد أفراد الأسرة ... الخ، على الكمية المستهلكة متساوي. إلا أن الباحث لا يمكنه أبدا أن يكون متأكدا وواثقا تماما من صحة الافتراض السابق. من أجل الحصول على تصور صحيح وواقعي عن تأثير الدخل على الكمية المستهلكة يجب دراسة العلاقة الارتباطية بينهما مع تثبيت العوامل الأخرى المؤثرة على الاستهلاك عند مستوى معين.

هذا الهدف يفترض اختيار أزواج المعطيات الخاصة بالكميات المستهلكة والدخل مع قيم ثابتة لكل العوامل الأخرى ما عدا الدخل. هذه الطريقة تسمح بإجراء التجربة تماما مثل الطرق المستعملة في بحوث علوم الطبيعة. إن الاقتصادي على خلاف الباحث في الظواهر الطبيعية لا يستطيع التحكم في مستوى العوامل الأخرى المؤثرة في الظاهرة التي يدرسها و بالتالي لا يستطيع تنظيمها.

بمعنى آخر لا يمكن مراقبة سلوك المتغيرات الاقتصادية المختلفة و بالتالي لا يمكن للباحث ضمان تحقيق شروط متساوية لإجراء تقييم تأثير عنصر واحد على موضوع الدراسة . في مثل هذه الحالة، لا يسع الباحث إلا إظهار تأثير العوامل الأخرى بإدخالها في النموذج. أي تكوين نموذج انحدار متعدد.

إن أبسط مثال على نماذج الانحدار المتعددة هو نموذج دالة الاستهلاك التي اقترحها ج. كينـــز في سنوات 1930 : $C = f(y,p,m,z)$

حيث:

C : الإنفاق على الاستهلاك .

y : الدخل.

p : مستوى الأثمان (الرقم القياسي للأسعار)

m : السيولة النقدية .

z : الأصول الجارية القابلة للتحويل إلى سيولة نقدية .

إن نماذج الانحدار المتعددة تستعمل بشكل واسع في حل مسائل الاقتصاد الجزئي مثل العرض، الطلب، الثمن، دخل الأوراق المالية، دراسة دالة التكاليف و الإنتاج و كذلك تستعمل في كثير من مسائل

الاقتصاد الكلي. نموذج الانحدار المتعدد كما أشرنا سابقا هو عبارة عن علاقة رياضية تجمع بين متغير ما تابع (y_i) وعدة متغيرات مستقلة (x_i) . يتم تكوين نموذج الانحدار المتعدد وفق الخطوات التالية:

أ- حصر وتحديد العوامل المؤثرة في الظاهرة المدروسة:

تكوين النموذج الانحداري المتعدد يبدأ من تحديد العوامل (X_i) المؤثرة في الظاهرة المدروسة والممثلة بالمتغير الناتج (y_i)، ثم الحصول على البيانات الإحصائية الخاصة بكل منهم . إن تحديد عدد و نوع هذه العوامل يتم عن طريق التحليل النظري الاقتصادي لطبيعة الظاهرة المعنية وظروف حدوثها.

هذه العوامل يجب أن تتوفر فيها الشروط التالية حتى يمكن إدخالها في نموذج الانحدار: - يجب أن تكون هذه العوامل قابلة للقياس الكمي، أما إذا كان أحد العوامل غير قابل للقياس الكمي بطريقة مباشرة فيمكن إعطاؤه تحديدا أو قياسا شبه كمي، كأن يعبر عنه بأوزان مختلفة أو بترتيب ما.

- أن لا تكون هذه العوامل مرتبطة ببعضها ارتباطا قويا، أو أن تكون في علاقة وظيفية مباشرة (عادة عندما تكون ($r_{xi\ .yi} > 0,7$). إن وجود علاقة ارتباطية قوية بين مؤشرين أو أكثر في نموذج انحداري ما تؤدي إلى ضعف مصداقية وفعالية المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى في تقدير معادلة الانحدار المقترحة، وهذا يجر وراءه ضعف المعنوية الإحصائية وعدم موضوعية معاملات معادلة الانحدار المذكورة.

من جهة أخرى، إذا كانت هناك علاقة ارتباطية قوية بين مؤشرين من مؤشرات نموذج انحدار ما فإنه من المستحيل تحديد وعزل تأثير كل منهما على المؤشر التابع (y) على حدة. ويكون تحليل نتائج حل نموذج الانحدار المعني غير ذات مصداقية.

- عند إضافة أي مؤشر جديد من المؤشرات المفروضة التأثير على(y) إلى نموذج الانحدار يجب أن يؤدي ذلك إلى زيادة قيمة معامل التحديد المتعدد (R^2) و انخفاض قيمة تباين الخطأ المرتكب $S_{\hat{y}}^2$. إذا لم يحدث هذا فإن العنصر المضاف في التحليل لا يؤدي إلى تحسين كفاءة النموذج و يجب حذفه.

- إن حشو النموذج الانحداري بمؤشرات زائدة غير ذات فعالية يؤدي ليس فقط إلى عدم انخفاض تباين الخطأ المرتكب و إلى عدم زيادة معامل التحديد ولكن يؤدي أيضا إلى عدم المعنوية الإحصائية لمعاملات معادلة الانحدار حسب مقياس (t) لستيودنت .

- عدد المؤشرات التي يتكون منها نموذج الانحدار يجب أن تكون في المتوسط أقل ب 6-7 مرات من حجم سلسلة المعطيات الخاصة بتطور متغيرات هذا النموذج و التي على أساسها يبنى النموذج. إذا كان هذا الشرط غير محقق فإن عدد درجات الحرية يكون صغيرا، وهذا يؤدي إلى أن معاملات معادلة نموذج الانحدار تكون غير معنوية إحصائيا وتكون قيمة مقياس فيشر المحسوبة F_{reel} أقل من قيمته الجدولية F_{tab} .
بعد تحديد المؤشرات المستقلة(x_i) التي يمكن أن تؤثر في المؤشر التابع (y_i) يجب فرز هذه المؤشرات إلى مؤشرات هامة أو أساسية و أخرى أقل أهمية. نعتمد على الأولى في تكوين نموذج الانحدار و نهمل الثانية.

عادة ما تتم عملية الفرز باستعمال عدة أدوات إحصائية من بينها جدول معاملات الارتباط الزوجي بين مؤشرات النموذج، معاملات الارتباط الجزئي لهذه المؤشرات و أيضا بالاستعانة بمقياس ستيودنت(t) المستعمل في تقييم جودة تقدير معاملات نموذج الانحدار المذكور .

إذا استعمل جدول معاملات الارتباط الزوجي لبيرسون ($r_{xi.xj}$)، على سبيل المثال، فإن عملية الفرز و الاختيار تتم حسب الخطوات التالية :

- دراسة و تقييم متانة و قوة العلاقة الارتباطية بين كل زوجين من المؤشرات المستقلة (x_i) و ذلك عن طريق حساب جميع معاملات الارتباط الزوجي بين كل مؤشرين اثنين على حدة من خلال حساب معامل الارتباط البسيط لبيرسون ($r_{x.x}$).
- تقييم العلاقة الارتباطية بين (y_i) و كل متغير من المتغيرات المستقلة(x_i) وذلك عن طريق حساب معامل الارتباط الزوجي لعلاقة المتغير التابع (y_i) بكل مؤشر من المؤشرات المستقلة عل حدة بواسطة معامل الارتباط البسيط(r_{xy}).
- نضع معاملات الارتباط الزوجي المحصل عليها في جدول كالتالي:

المؤشرات	y	x_1	x_2	x_3	....	x_n
y	1	r_{yx1}	r_{yx2}	r_{yx3}	....	r_{yxn}
x_1	r_{x1y}	1	r_{x1x2}	r_{x1x3}	....	r_{x1xn}
x_2	r_{x2y}	r_{x2x1}	1	r_{x2x3}	....	r_{x2xn}
x_3	r_{x3y}	r_{x3x1}	r_{x3x2}	1	....	r_{x3xn}
....	......	....				
x_n	r_{xny}	r_{xnx1}	r_{xnx2}	r_{xnx3}	....	1

حيث أن عناصر هذا الجدول المتناظرة بالنسبة للقطر، الذي قيمته تساوي 1، هي متساوية ($r_{x1x2} = r_{x2x1}$ ، $r_{x3\,x2} = r_{x2x3}$ ،....الخ).
(قيم عناصر القطر تساوي 1 لأن معامل ارتباط قيم أي مؤشر مع نفسه =1).

- إذا كان معامل الارتباط بين مؤشرين مستقلين ما (مثلا x_1,x_2) قويا، أي إذا ما كان $r_{x1x2} > 0,70$ ، فهذا يدل على وجود علاقة ارتباطية قوية بين هذين المؤشرين. في هذه الحالة لا يجب إظهار المؤشرين مع بعض في معادلة الانحدار المقترحة و نكتفي بالاحتفاظ بواحد منهما فقط في هذه المعادلة، ونعتبر أن أحدهما ينوب عن الآخر و يمثله. لمعرفة أي من المؤشرين يجب التخلي عنه و أي منهما يجب الاحتفاظ به في معادلة الانحدار نرجع إلى معامل ارتباط كل منهما بالمؤشر التابع (y). المؤشر المستقل الذي يكون ارتباطه بـــ(y_i) أقوى هو الذي يحتفظ به. مثال ذلك: إذا كان ($r_{yx1} > r_{yx2}$) فنتخلى في هذه في الحالة عن(x_2) ونبقي على(x_1) فقط في معادلة التمثيل. أما إذا كان $r_{yx1} = r_{yx2}$فنتخلى عن واحد منهما عشوائيا.

- الازدواج الخطي (Multicolinéarité):

إن قيم معاملات الارتباط الزوجي بين المؤشرات المستقلة تكشف فقط عن درجة متانة العلاقة الارتباطية بين كل زوجين من هذه المؤشرات. لكن الصعوبة الكبيرة في استعمال جهاز الانحدار المتعدد تظهر عندما يكون هناك ارتباطا قويا بين أكثر من مؤشر مستقل من مؤشرات نموذج الانحدار. ذلك لأنه من أجل أن يكون نموذج الانحدار المقترح فعالا و يتمتع بمصداقية إحصائية عالية يفترض عدم وجود ارتباط

خطي بين متغيراته المستقلة. المقصود إذن بالازدواج الخطي هو وجود ارتباط خطي تام بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار المعني . إن مشكلة الازدواج الخطي تؤثر على دقة حساب معاملات معادلة الانحدار المراد تقديرها. فإذا كانت معادلة الانحدار تتكون من متغيرين مستقلين (x_i,x_2) و كان بين هذين المتغيرين ارتباط تام (معامل ارتباط زوجي = 1)، فإن هذا يعني أن محدد مصفوفة معاملات الارتباط الزوجي ($det.r = 0$)، مما يؤدي إلى استحالة إيجاد قيم عددية دقيقة لمعاملات هذه المتغيرات في المعادلة المذكورة . بالإضافة إلى ذلك نلاحظ في مثل هذه الحالة أن الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات معادلة الانحدار تكون كبيرة.

هنا يجب التنبيه إلى أن المشكلة ليست في وجود الازدواج الخطي في حد ذاته بقدر ما هي في درجة أو مستوى هذا الازدواج الخطي، فإذا كانت درجة الازدواج الخطي منخفضة فمن الممكن قبول هذا الازدواج. تتم معالجة الحالات التي تكون فيها درجة الازدواج الخطي عالية إما بزيادة عدد المشاهدات (حجم العينة الإحصائية)، زيادة متغيرات مستقلة وحذف أخرى أو تغيير معادلة الانحدار المقترحة واستبدالها بأخرى أكثر تمثيلا.

– اختبار وجود الازدواج الخطي :

هناك عدة اختبارات لاكتشاف وجود الازدواج الخطي من أهمها اختبار(Farrar- Glauber). يتمثل هذا الاختبار في حساب قيمة محدد معاملات الارتباط الزوجي بين المؤشرات المستقلة ($\det R = | r_{xi\ .xj} |$).

إذا كانت المؤشرات المستقلة (x_i) للنموذج غير مرتبطة تماما في ما بينها

فإن محدد مصفوفة معاملات الارتباط الزوجي يساوي"1"، ذلك لأن كل عناصر (r_{xixj}) الغير واقعة على القطر تساوي الصفر.

$$\det |R| = \begin{vmatrix} r_{x_1.x_1} & r_{x_1.x_2} & r_{x_1.x_3} \\ r_{x_2.x_1} & r_{x_2.x_2} & r_{rx_2.x_3} \\ r_{x3.x1} & r_{x3.x2} & r_{x3.x3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

لأن : $r_{x1x1} = r_{x2x2} = r_{x3x3} = 1 \;;\; r_{x1x2} = r_{x2x3} = r_{x1x3} = 0$

أما إذا كانت المؤشرات (x_i) بالعكس توجد فيما بينها في حالة ارتباط تام (كل عناصر r_{xixj} تساوي"1 ") فإن محدد مصفوفة r_{xixj} في هذه الحالة يساوي صفر.

$$\det = |R| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

إذن كلما كان محدد مصفوفة معاملات الارتباط الزوجي بين المؤشرات أقرب إلى الصفر كلما كان الازدواج الخطي أقوى وهذا يؤدي إلى أن نتائج نموذج الانحدار تكون غير موضوعية ولا تتمتع بالمصداقية. وبالعكس كلما كانت قيمة المحدد ($\det |R|$) أقرب إلى الواحد كلما كان الازدواج الخطي للنموذج أقل. من أجل اكتشاف الازدواج الخطي وقياس درجته نجري اختبار H_0 المتمثل في حساب قيمة (χ^2) كالتالي:

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6} (2.m + 5) \right] \text{Log. det R}$$

حيث أن:

n : عدد المشاهدات

m : عدد المتغيرات المستقلة في معادلة الانحدار.

log det R : لوغاريتم قيمة محدد معاملات الارتباط الزوجي.

القيم المحسوبة لــ($\chi 2$) نقارنها بالقيمة الجدولية لــ (χ^2) المحصل عليها من جدول القيم الحرجة لــ(χ^2) عند درجات حرية عددها $V= ½ m.(m-1)$ ومستوى معنوية (α)محدد. إذا كانت قيمة (χ^2) المحسوبة أكبر من قيمة(χ^2) الجدولية، فإن هذا يدل على وجود ازدواج خطي في نموذج الانحدار المقترح. وبالعكس عندما تكون قيمة (χ^2) المحسوبة أقل من قيمة (χ^2) الجدولية فإن هذا يدل على عدم وجود ازدواج خطي في النموذج المذكور.

- تحديد المتغيرات المستقلة المتسببة في حدوث الازدواج الخطي:

من أجل تحديد المتغير(أو المتغيرات) المسؤولة عن وجود حالة الازدواج الخطي في نموذج انحداري ما يجب أولا حساب معاملات التحديد المتعدد(R^2) لعلاقة كل متغير (x_i) من المتغيرات المستقلة مع بقية المتغيرات المستقلة. بمعنى نأخذ في كل مرة متغير مستقل على أنه المتغير التابع ونحسب معامل التحديد لهذا المتغير مع بقية المتغيرات المستقلة الأخرى.

أي نحسب : $R^2_{x1,x2x3}$, $R^2_{x2,x1x3}$, $R^2_{x3,x1x2}$

ثم نحسب مقياس فيشر (F) لكل متغير مستقل كالتالي :

$$F_{x1}(reel) = \frac{R^2_{x_1,x_2x_3}}{1-R^2_{x_1,x_2x_3}} \cdot \frac{n-m}{m-1};\ F_{x2}(reel) = \frac{R^2_{x_2,x_1x_3}}{1-R^2_{x_2,x_1x_3}} \cdot \frac{n-m}{m-1};$$

$$F_{x3}(reel) = \frac{R^2_{x_3,x_1x_2}}{1-R^2_{x_3,x_1x_2}} \cdot \frac{n-m}{m-1}$$

ثم نقارن القيمة المحسوبة لمقياس فيشر (F_{reel}) بالقيمة الجدولية لهذا المقياس، المستخرجة من الجدول الإحصائي للقيم الحرجة لفيشر عند درجات حرية مقدارها $(m-1)$ للبسط و$(n-m)$ للمقام ومستوى معنوية (α) .

إذا كان: $F_{xj}(reel) > F_{tab}$ فهذا يعني أن المتغير (x_j) يتسبب في ازدواج خطي، أما إذا كان $F_{xj}(reel) < F_{tab}$ فإن المتغير المعني ليس مرتبطا بالمتغيرات الأخرى و بالتالي فإنه لا يتسبب في ازدواج خطي.

ب – *اختيار نوع معادلة الانحدار* :

بعد تحديد وفرز أهم العوامل المؤثرة في الظاهرة المدروسة (y_i) يتم اختيار شكل معادلة الانحدار التي تعبر عن العلاقة بين عناصر الظاهرة المدروسة. هذه المرحلة تعتبر من أهم و أعقد مراحل تكوين نماذج الانحدار المتعدد. هذه الصعوبة تكمن في عدم وجود أداة تمكن الباحث من اختيار نموذج الانحدار المناسب الذي يمثل العلاقة المدروسة. فشكل انتشار القيم كما رأينا سابقا في نماذج الانحدار البسيطة يوضح شكل الاتجاه العام لتطور الظاهرة المدروسة وهذا بدوره يساعد في اختيار نوع معادلة الانحدار التي تمثل العلاقة المدروسة بين (y_i)و(x_i). أما في الانحدار المتعدد فيصعب رسم انتشار قيم المتغيرات في الفراغ M+1 .

لذلك فإنه عادة ما يعتمد في تحديد نوع نموذج الانحدار على معارف الباحث في ميدان النظرية الاقتصادية وقدراته على استعمالها في معالجة الظاهرة الاقتصادية المدروسة.إن التحليل الاقتصادي سيمكن الباحث من حصر العلاقة المدروسة وأهم خواصها واكتشاف أهم العناصر

المؤثرة فيها، شكل تفاعل هذه العناصر في ما بينها وكيفية تأثيرها على الظاهرة محل البحث.

من بين نماذج الانحدار المتعددة الأكثر استعمالا هي نموذج الانحدار المتعدد الخطي ونموذج الانحدار المتعدد الأسي: في نموذج الانحدار المتعدد الخطي: $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots\ldots + b_nx_n + \varepsilon$ ، معامل أي متغير مستقل(b_i) يعبر عن التغير المتوسط في الناتج(y) نتيجة لتغير هذا المؤشر المستقل بوحدة واحدة مع ثبات قيم المؤشرات المستقلة الأخرى عند مستواها المتوسط.

مثال: نفترض أن علاقة الإنفاق على المواد الغذائية لدى مجموعة من العائلات تتميز بالمعادلة الانحدارية التالية: $\hat{y}_i = 0{,}5 + 0{,}35x_1 + 0{,}73x_2$.
حيث:

$\hat{y}_i$: إنفاق العائلات على المواد الغذائية خلال شهر.
x_1 : الدخل الشهري للفرد في كل عائلة.
x_2 : عدد أفراد العائلة.

تحليل هذه المعادلة يمكننا من التوصل إلى الاستنتاجات التالية :
زيادة دخل الفرد في العائلة بـــ 100 دج مثلا يؤدي إلى زيادة إنفاق هذه العائلة على التغذية في المتوسط بـــ35دج عند نفس المستوى المتوسط السابق لعدد أفراد الأسرة. بمعنى آخر 35% من الإنفاق الإضافي للأسرة يذهب إلى التغذية. من جهة أخرى، زيادة عدد أفراد الأسرة، مع بقاء مستوى دخلها المتوسط ثابتا، يؤدي أيضا إلى زيادة

النفقات على التغذية بـــ 73دج. إن المعامل الحر لمعادلة الانحدار ($a= 0,5$) في هذه الحالة ليس له تفسير اقتصادي واضح.

عند دراسة مسألة الاستهلاك، فإن معاملات الانحدار في هذه الحالة تعبر عن الميل الحدي للاستهلاك. مثال : إذا كانت لدينا دالة الاستهلاك التالية : $C_t = a + b_1.R_t + b_2.R_{t-1} + \varepsilon$ فهذا يعني أن الاستهلاك في الفترة الزمنية (t) وهو(C_t)يتوقف على مستوى الدخل في نفس الفترة (R_t) وأيضا على مستوى الدخل المحصل عليه في الفترة السابقة(R_{t-1}). لذلك فإن المعاملb_1 يعبر عن تأثر الاستهلاك نتيجة زيادة الدخل(R_t) بوحدة نقدية واحدة مع ثبات دخل الفترة السابقة(R_{t-1}) عند نفس المستوى السابق. المعامل b_1 يسمى عادة بالميل الحدي للاستهلاك قصير المدى. إن زيادة الدخل (R_t و R_{t-1})بوحدة واحدة في الفترتين(t) و(t-1) مع بعض تكون نتيجته زيادة الاستهلاك بـــ($b_L= b_1 + b_2$) . المعامل(b_L) في هذه الحالة يعبر عن الميل الحدي للاستهلاك طويل المدى. بما أن $b_1 >0$, $b_2>0$ فإن الميل الحدي للاستهلاك طويل المدى يجب أن يكون أكبر من الميل الحدي للاستهلاك قصير المدى ($b_L> b_1$) .

في نموذج الانحدار المتعدد الأسي: $y_i = a. x_1^{b1}. x_2^{b2}. \ldots .x_n^{bn} +\varepsilon$ ، المعاملات (b_i)هي معاملات المرونة، حيث أنها تعبر عن النسبة المتوسطة التي يتغير بها الناتج(y) نتيجة تغير المؤشر(x_i) المعني بـــ1% مع ثبات المؤشرات المستقلة الأخرى عند نفس مستواها السابق .

هذا النوع من معادلات الانحدار عرف انتشارا واسعا في دراسة دوال الإنتاج، دوال العرض والطلب، دوال الاستهلاك، وغيرها. نفترض أن دالة الطلب على اللحم كانت كما يلي :

$$(\hat{y} = 0{,}82\ x_1^{-2{,}63} . x_2^{1{,}11}) : \ \hat{y} = 0{,}82 . \ \frac{x_2^{1{,}11}}{x_1^{2{,}63}}$$

حيث:

$\hat{y}$: الكمية المطلوبة من اللحم .

x_1 : ثمن اللحم .

x_2 : الدخل.

هذه الدالة تعني أن زيادة ثمن اللحم بـــ(1%) مع بقاء مستوى الدخل ثابتا، تؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة في المتوسط بـــ2,63 % . أما زيادة الدخل بـــ(1%) مع بقاء مستوى الثمن ثابتا، فتؤدي إلى زيادة الطلب بـــ 1,11% . بالإضافة إلى المعنى الاقتصادي لكل معامل (b_i) من معاملات مؤشرات معادلة الانحدار فإن مجموع هذه المعامـــــلات ($B = b_1 + b_2$) له تفسير اقتصادي آخر وهو مردودية اقتصاد الحجم. بمعنى مرونة حجم الإنتاج إذا ما تغيرت كل عوامل الإنتاج بـــ(1%). في المثال السابق الخاص بالطلب على اللحم، إذا زاد كل من الدخل والثمن بـــ(1%) فإن الكمية المطلوبة ستنخفض بـــ 1,52% لأن مرونة الطلب الكلية بالنسبة للدخل والثمن في هذه الحالة تصبح تساوي($B = - 2{,}63 + 1{,}11$).

ج – تقدير معاملات نموذج الانحدار المتعدد الخطي:

إذا كانت العلاقة بين الظاهرة المدروسة (y_i) والعوامل المؤثرة فيها (x_i) هي علاقة خطية، فعادة ما تمثل بالنموذج التالي:

$y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n + \varepsilon$ من أجل تقدير هذا النموذج يلزم حساب ثوابته.

من أجل حساب هذه الثوابت، يجب أن يتحقق الشرط الأساسي لطريقة المربعات لصغرى الذي ينص كما رأينا سابقا على أن يكون مجموع مربعات انحرافات القيم التقديرية لـــy وهي $(\hat{y}_i)$ عن القيم الفعلية لها وهي(y_i) أصغر ما يمكن. أي يجب أن يتحقق الشرط:
$.S= \Sigma (y-\hat{y}_i)^2 = min$

بتعويض $(\hat{y}_i)$ بقيمتها السابقة فإن(S) تصبح كالتالي:
$$S = \Sigma(y - a - b_1x_1-b_2x_2 -....- b_nx_n)^2 = min$$
وكما أشرنا بالنسبة لنموذج الانحدار البسيط، فهنا أيضا يمكن أن تأخذ(S) أصغر قيمة ممكنة لها عندما تكون كل مشتقاته الجزئية بالنسبة لـــ (a ، b_1 ، b_2 ،..... b_n) مساوية للصفر.

إن هذا الشرط يسمح لنا بالحصول على المعادلات الخطية التالية:
$$\begin{cases} \Sigma y = na + b_1\Sigma x_1 + b2.\Sigma x_2+......+b_n \Sigma x_n \\ \Sigma y.x_1= a \Sigma x_1 + b_1 \Sigma x_1^2 + b_2 \Sigma x_1x_2 +.......+ b_n \Sigma x_n.x_1 \\ \Sigma y.x_2 = a \Sigma x2 + b_1 \Sigma x_1 x_2+ b_2 \Sigma x_2^2 +....+ b_n \Sigma x_n.x_2 \\ ------------------------------ \\ \Sigma y.x_n= a \Sigma x_n + b_1 \Sigma x_1x_n+ b_2 \Sigma x_2x_n+....+ b_n \Sigma x_n^2 . \end{cases}$$

هذه المعادلات هي معادلات خطية، المجهول فيها هي الثوابت (b_n،....، b_2 ، b_1 ،a) . بحل هذه المعادلات نحصل على قيم هذه الثوابت التي تجعل الدالة ($S(a,b_1,....,b_n)$ أصغر ما يمكن.

إذا افترضنا أن (Δ)هو المحدد الرئيسي لجملة المعادلات السابقة وأن Δ_a، Δ_{b1} ،.....، Δ_{bn} هي المحددات الجزئية التي تسمح بحساب المعاملات $b_n,.....b_2, b_1, a$. فإن:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad ; \quad b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta} \; ; \; .... \; ; \quad b_n = \frac{\Delta_{b_n}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 & ..... & \Sigma x_n \\ \Sigma x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 & .... & \Sigma x_n x_1 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 & .... & \Sigma x_n x_2 \\ . & . & . & .... & . \\ \Sigma x_n & \Sigma x_1 x_n & \Sigma x_2 x_n & .... & \Sigma x_n^2 \end{vmatrix}$$

Δ_a , Δ_{b1} , Δ_{b2} , ... , Δ_{b1} هي محددات جزئية يمكن الحصول عليها بتعويض العمود المعني بالمعامل الذي نريد حسابه في المحدد الأساسي، بقيم الطرف الأيسر من جملة المعادلات السابقة.

مثـــال:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \Sigma y & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 & .... & \Sigma x_n \\ \Sigma y.x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 & .... & \Sigma x_n x_1 \\ \Sigma y.x_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 & .... & \Sigma x_n x_2 \\ ... & ... & ... & .... & ... \\ \Sigma y.x_n & \Sigma x_1 x_n & \Sigma x_2 x_n & .... & \Sigma x_n^2 \end{vmatrix}$$

معادلة الانحدار الخطية المتعددة في شكلها المعياري

هناك مدخل آخر لتقدير نموذج الانحدار المتعدد الخطي، وذلك بتحويل معادلة الانحدار الخطية من شكلها الطبيعي إلى شكلها المعياري.

فإذا كانت لدينا المعادلة الانحدارية التالية:

$$\hat{y}_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 \; \ldots + b_nx_n$$

فإن شكلها المعياري يمكن كتابته كالتالي:

$$t_y = \beta_1.t_{x1} + \beta_2.t_{x2} + \; \ldots + \beta_n.t_{xn}$$

حيث أن:

$t_y , t_{x1} , t_{x2} , \; \ldots , t_{xn}$ هي المتغيرات المعيارية. بحيث أن قيمها تحسب كالتالي:

$$t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} \; ; \; t_{x1} = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_{x1}} \; ; \ldots\ldots ; \; t_{xn} = \frac{x_n - \bar{x}_n}{\sigma_{xn}}$$

β_i : هي المعاملات المعيارية لمعاملات الانحدار.

بتطبيق طريقة المربعات الصغرى على معادلة الانحدار المتعددة المعيارية وبعد إجراء التحويلات اللازمة نحصل على جملة المعادلات الطبيعية التالية:

$$\begin{cases} r_{yx1} = \beta_1 + \beta_2.\, r_{x1.x2} + \beta_3.\, r_{x1.x3} + \ldots + \beta_n.\, r_{x1.xn} \\ r_{yx2} = \beta_1.r_{x.2x1} + \beta_2 + \beta_3.r_{x2.\,x3} \; + \ldots + \beta_n.\, r_{x2.xn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{yxn} = \beta_1.r_{xnx1} + \beta_2.r_{xnx2} + \beta_3.r_{xn.x3} + \ldots + \beta_n \end{cases}$$

عند حل هذه المعادلات باستعمال طريقة المحددات، نستطيع إيجاد قيم معاملات معادلة الانحدار في شكلها المعياري (قيم β_i). مثال: إذا كانت لدينا معادلة الانحدار المتعددة الخطية المتكونة من متغيرين مستقلين فقط كالتالي : $\hat{y}_i = a + b_1x_1 + b_2x_2$

فإن شكلها المعياري يكون: $t_{\hat{y}} = \beta_1 . t_{x1} + \beta_2 . t_{x2}$

وتكون المعادلتين الطبيعيتين لحساب المعاملات (β_i) هي:

$$\begin{cases} r_{yx1} = \beta_1 + \beta_2 . r_{x2.x1} \\ r_{yx2} = \beta_1 . r_{x2.x1} + \beta_2 \end{cases}$$

من أجل حساب قيم المعاملات(β_1 , β_2)، نقوم بحساب Δ_{b2} , Δ_{b1} , Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_2.x_1} \\ r_{x_2.x_1} & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^2_{x1x2}$$

$$\Delta_{\beta1} = \begin{vmatrix} r_{y.x_1} & r_{x_2.x_1} \\ r_{y.x_2} & 1 \end{vmatrix} = r_{yx1} - r_{yx2} . r_{x2x1}$$

$$\beta_1 = \frac{\Delta_{\beta_1}}{\Delta} = \frac{r_{y.x_1} - r_{yx_2} \times r_{x_2\,x_1}}{1 - r^2_{x_1\,x_2}}$$

$$\Delta_{\beta2} = \begin{vmatrix} 1 & r_{y.x_1} \\ r_{x_2.x_1} & r_{y.x_2} \end{vmatrix} = r_{yx2} - r_{yx1} . r_{x2x1}$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \times r_{x_2 . x_1}}{1 - x^2_{x_1 x_2}}$$

علاقة معاملات معادلة الانحدار في شكلها الطبيعي (bi) بمعاملات معادلة الانحدار في شكلها المعياري (β_i) يمكن التعبير عنها كالتالي:

$$b_1 = \beta_1 . \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \times r_{x_2 x_1}}{1 - r^2_{x_1 x_2}} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

أما المعامل الحر لمعادلة الانحدار في شكلها الطبيعي فيمكن الحصول عليها في هذه الحالة كالتالي :

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - ...... - b_{n.} \bar{x}_n$$

هذه العلاقة تسمح بالمرور من الشكل الطبيعي لمعادلة الانحدار إلى شكلها المعياري والعكس.

د – تقدير نموذج الانحدار المتعدد غير الخطي :

نموذج الانحدار المتعدد غير الخطي يأخذ عدة أشكال منها :

$$y_i = a . x_1^{b_1} . x_2^{b_2} . x_3^{b_3} . \; \ldots \; . x_n^{bn} . \varepsilon$$

$$y_i = a . e^{b_1 . x_1} . e^{b_2 . x_2} .... e^{bnxn} . \varepsilon$$

$$y_i = \frac{1}{a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n} . \varepsilon$$

من أجل تقدير مثل هذه النماذج الانحدارية وحساب معاملاتها، نحول شكل هذه المعادلات إلى الشكل الخطي وذلك بتحويل متغيراتها الأصلية إلى متغيرات لوغاريتمية ثم نستعمل طريقة المربعات الصغرى لإيجاد قيم معاملاتها .

1- تقدير نموذج الانحدار إذا كان في شكل جداء للمؤشرات المستقلة كالتالي:

$$\hat{y}_i = a \,.\, x_1^{b1} \,.\, x_2^{b2} \,\ldots\ldots\, x_n^{b}$$

نحول هذا النموذج إلى شكله الخطي و ذلك بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\log \hat{y}_i = \log a + b_1.\log x_1 + b_2.\log x_2 + \ldots\ldots + b_n.\log x_n$$

نضع: $X_1 = \log x_1;\ \ A = \log a\ \ ,\ \hat{Y}_i = \log \hat{y}_i$

$;\ X_2 = \log x_2\ ;\ \ldots\ ;\ X_n = \log x_n$

فتأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي :

$$\hat{Y}_i = A + b_1.X_1 + b_2.X_2 + \ \ldots\ldots + b_n.X_n$$

$$s = \Sigma\,(\log y - \log \hat{y}_i)^2 = \min$$

$$s = \Sigma(Y - \hat{Y}_i)^2 = \min$$

$$S = \Sigma(Y - A - b_1X_1 - b_2X_2 - \ \ldots\ldots - \ b_nX_n)^2 = \min$$

بعد الاشتقاق الجزئي ومساواته بالصفر نحصل على المعادلات التي تسمح بحساب معاملات النموذج.

$$\begin{cases} \Sigma Y = n.A + b_1\Sigma X_1 + b_2\Sigma X_2 + \ldots + b_n\,\Sigma\, X_n \\ \Sigma Y.X_1 = A.\Sigma X_1 + b_1\Sigma X_1^2 + b_2\Sigma X_1.X_2 + \ldots + b_n\Sigma X_1.X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma Y.X_n = A\Sigma X_n + b_1\Sigma X_1.X_n + b_2\Sigma X_2.X_n + \ldots + b_n\Sigma X_n^2 \end{cases}$$

كما رأينا بالنسبة لحساب معاملات النموذج الخطي فنستطيع هنا أيضا وبنفس الطريقة حساب معاملات النموذج غير الخطي انطلاقا من المعادلات الخطية أعلاه.

حيث أن: $A = \frac{\Delta_A}{\Delta}\ \ ;\ b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta};\ \ldots\ldots\ ;\ b_n = \frac{\Delta_{bn}}{\Delta}$

وتكون : $a = 10^{A} = 10^{\frac{\Delta A}{\Delta}}$ أو : $a = e^{A} = e^{\frac{\Delta A}{\Delta}}$ حسبما إذا كان اللوغاريتم نيبيريا أو عشريا، وتكون معادلة الانحدار المقدرة هي:

$$\hat{y}_i = e^{A} .\ x_1^{\frac{\Delta b1}{\Delta}} . x_2^{\frac{\Delta b2}{\Delta}} \ldots\ldots x_n^{\frac{\Delta bn}{\Delta}}$$

2- تقدير نموذج الانحدار إذا كان في شكل أسي متعدد كالتالي:

$$y_i = a . e^{b1.x1} . e^{b2.x2} \ldots\ldots e^{bn.xn} . \varepsilon$$

حيث أن : $(x_1 , x_2 ,. \ldots, x_n)$ هي المتغيرات المستقلة الأساسية الأكثر تأثيرا في المتغير التابع $(\hat{y}_i)$. أما $(a , b_1 , \ldots\ldots, b_n)$ فهي ثوابت نموذج الانحدار المقترح. من أجل تقدير هذا النموذج و حساب ثوابته نقوم بتحويل شكله الحالي إلى الشكل الخطي وذلك بأخذ لوغاريتم الطرفين كالتالي: $\ln y_i = \ln a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots\ldots + b_nx_n$

نضع: $\ln a = A \quad ; \quad \ln y_i = Y_i$

فتصبح المعادلة السابقة كالتالي: $Y_i = A + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$

من أجل حساب معاملات هذا النموذج الذي يمثل الظاهرة المدروسة أحسن تمثيل يجب أن يتحقق شرط المربعات الصغري:

$$S = \Sigma(\ln y - \ln \hat{y}_i)^2 = \min$$
$$S = \Sigma(Y - \hat{Y}_i)^2 = \min$$
$$S = \Sigma(Y - A - b_1x_1 - b_2x_2 - \ldots\ldots - b_nx_n)^2 = \min$$

بعد اشتقاق هذه المعادلة جزئيا بالنسبة للثوابت المشار إليها سابقا ومساواتها بالصفر، نحصل على المعادلات التي تسمح بحساب قيم هذه الثوابت.

$$\begin{cases} \Sigma Y = n.A + b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2 + \ldots\ldots + b_n\, \Sigma x_n \\ \Sigma Y.x_1 = A\Sigma x_1 + b_1\Sigma x_i^2 + b_2\Sigma x_1.x_2 + \; + \ldots\ldots + b_n\Sigma x_1.x_n \\ \Sigma Y.x_2 = A\Sigma x_2 + b_1\Sigma x_1.x_2 + b_2\Sigma x_2^2 + \; \ldots\ldots b_n\Sigma x_2.x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma Y.x_n = A\Sigma x_n + b_1\Sigma x_1 x_n + b2\Sigma x_2.x_n \; + \ldots\ldots + b_n\Sigma x_n^2 \end{cases}$$

انطلاقا من هذه المعادلات الخطية نستطيع أن نحسب معاملات النموذج أعلاه بنفس الطريقة التي حسبنا بها معاملات النماذج المتعددة السابقة.

بحيث أن : $A = \frac{\Delta_A}{\Delta}$; $b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta}$; $b_2 = \frac{\Delta_{b_2}}{\Delta}$; … ; $b_n = \frac{\Delta_{b_n}}{\Delta}$

وتكون : $a = e^A = e^{\frac{\Delta A}{\Delta}}$

ومعادلة الانحدار بعد حساب ثوابتها تأخذ الشكل التالي:

$$\hat{y}_i = e^{\frac{\Delta A}{\Delta}} . e^{\frac{\Delta b1}{\Delta}.x1} . e^{\frac{\Delta b2}{\Delta}.x2} \ldots\ldots\ldots e^{\frac{\Delta bn}{\Delta}.xn}$$

بنفس المنهج نستطيع أن نقدر ثوابت نماذج الانحدار المتعددة غير الخطية الأخرى.

II - 1- 2- تقييم نموذج الانحدار المتعدد

بعد تكوين نموذج الانحدار و تقدير معاملاته سوف نحصل على معادلة محددة لتمثيل العلاقة محل الدراسة بين الظاهرة المفسرة(y_i) ومجموعة العوامل المؤثرة فيها (x_i). ننتقل الآن إلى مرحلة تحليل الأداء العام لنموذج الانحدار المختار وتقييم جودة وفعالية تمثيله للعلاقة المدروسة.

1- حساب معامل الارتباط المتعدد ($R_{yx1,x2,\dots,xn}$) :

من أجل حساب معامل ارتباط المؤشر التابع(y) بالمؤشرات المستقلة (x_i) التي يتكون منها النموذج محل الدراسة نستعين بالجدول السابق الإشارة إليه لمعاملات الارتباط الزوجية ونكون محددين كالتالي:

المحدد A: يحتوي على كل عناصر الجدول السابق .

المحدد B : يحتوي على كل عناصر هذا الجدول ما عدا الصف والعمود الأولين اللذان يشكلان قيم معاملات الارتباط الزوجي ل(y_i) بكل من .(x_i)

في حالة نموذج الانحدار المتعدد الخطي (حالة وجود علاقة خطية بين المتغيرات المستقلة(x_i و y_i) فإن معامل الارتباط المتعدد:(R) يمكن حسابه كالتالي: $R_{yx1,x2,\dots,xn} = \sqrt{1 - \frac{A}{B}}$

حيث أن

$$A=\begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_n} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_n} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_ny} & r_{x_nx_1} & r_{x_nx_2} & \dots & 1 \end{vmatrix} ; B=\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_n} \\ r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_n} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & 1 & \dots & r_{x_3x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_nx_1} & r_{x_nx_2} & r_{x_nx_3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

أما في حالة علاقة ارتباطية متعددة غير خطية بين (x_i ,y_i) فإن معامل الارتباط المتعدد غير الخطي(R) يحسب بواسطة العبارة التالية:

$$R_{yx1,x2,\dots,xn} = \sqrt{1 - \frac{S^2_{y\hat{y}}}{\sigma^2_y}} \quad \text{أو} \quad R_{yx1,x2,\dots,xn} = \sqrt{1 - \frac{(y-\hat{y})^2}{(y-\bar{y})^2}}$$

قيمة معامل الارتباط(R) تتراوح في المجال [0 ، 1] و يجب أن لا تكون أقل من أكبر قيمة لمعاملات الارتباط الزوجي (r_{yxi}) ، أي : $R_{yx1,x2,..,xn} \geq \max\ r_{yxi}$

2- حساب معامل التحديد المتعدد(R^2) :

حساب معامل التحديد المتعدد يعتمد، كما هو الشأن في نموذج الانحدار البسيط، على تحليل تباين المؤشر التابع(y): التباين الكلي σ_y^2 ، تباين القيم التقديرية $\sigma_{\hat{y}}^2$ و تباين التمثيل $\sigma_{y\hat{y}}^2$ ،حيث أن:

$\sigma_y^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 + \sigma_{y\hat{y}}^2$. كلما اقترب تباين التمثيل من الصفر واقترب تباين القيم التقديرية من التباين الكلي كلما كان التأثير المشترك للمتغيرات المستقلة ($x_1, x_2, .. , x_n$) على المتغير التابع كبيرا و هذا يعني أن معادلة الانحدار المقترحة لتمثيل العلاقة المدروسة تعتبر ذات فعالية كبيرة. إن موضوعية وجودة تمثيل المعادلة المفروضة يعبر عنها، كما رأينا سابقا، معامل التحديد المتعدد (R^2) .

معامل التحديد R^2 = مربع معامل الارتباط المتعدد: $R^2 = (R_{yx1,...,xn})^2$.

أي أن : $R^2 = 1 - \frac{A}{B}$ ، أو : $R^2 = 1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$. يمكن حساب قيمة R^2 من العلاقة التالية أيضا:

$$R^2 = \frac{b_1.\Sigma(y_i - \bar{y}).(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2.\Sigma(y_i - \bar{y}).(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2} ،$$

حيث أن (b_1 , b_2) هما معاملات المتغيرات المستقلة (x_{1i} , x_{2i}) في معادلة الانحدار و ($\bar{x}_1 , \bar{x}_2$) هما الوسطان الحسابيان لقيم هذه المتغيرات. مجال تغير R^2 هو [0، +1]. كلما اقتربR^2 من 1 فهذا يدل على أن

معادلة الانحدار تمثل تمثيلا جيدا العلاقة المدروسة بين(x_i)و(y). كلما اقترب R^2 من الصفر فإن نموذج الانحدار المقترح لا يصلح لتمثيل الظاهرة المدروسة ويجب استبداله بنموذج آخر أو أن هناك عوامل مستقلة أخرى هي ذات تأثير كبير على(y_i) لم نأخذها بعين الاعتبار.

3- اختبار فيشر (مقياس F) :

اختبار موضوعية معامل التحديد ومعاما الارتباط وكذلك جودة تمثيل معادلة الانحدار المقترحة تتم بواسطة مقياس فيشر كما رأينا ذلك في نموذج الانحدار البسيط. لذلك فإن المعنوية الإحصائية لمعادلة النموذج القياسي المقترحة تقاس هنا أيضا باستخدام نفس العبارة المستخدمة سابقا لمقياس فيشر:

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m}$$

أما (F_{tab}) فتستخرج من الجدول الإحصائي للقيم الحرجة لفيشر.

4- تقييم معاملات معادلة الانحدار المقدرة(a , b_i) :

من أجل تقييم الأهمية الإحصائية لتكوين معاملات معادلة الانحدار يتم، كما رأينا في حالة نموذج الانحدار البسيط، حساب مقياس ستيودنت(t_{bi}) لكل معامل (b_i) من معاملات المعادلة المقترحة: $t_{bi} = \frac{b_i}{S.E_{bi}}$

حيث أن:

b_i : معامل المتغير(x_i) في معادلة الانحدار .

m_{bi} : متوسط مربع خطأ المعامل b_i (الخطأ المعياري $S.E_{bi}$).

$$S.E_{bi} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{1-R^2_{yx_1,\dots\dots,x_n}}}{\sigma_{x_i} \cdot \sqrt{1-R^2_{x_i,x_2,\dots\dots,x_n}}} \times \frac{1}{\sqrt{n-m-1}}$$

$R^2_{yx1,\,..\,,\,xn}$: معامل التحديد المتعدد (مربع معامل الارتباط المتعدد) للمؤشر(y) بجميع المؤشرات المستقلة(x_i) .

$R^2_{xi,x1,\dots\dots xn}$: معامل التحديد المتعدد (مربع معامل الارتباط المتعدد) للمؤشر(x_i) بجميع المؤشرات المستقلة ما عدا المؤشر التابع(y).

σ_y : الانحراف المعياري لقيم المؤشر التابع.

σ_{xi} : الانحراف المعياري لقيم المؤشر(x) المرافق للمعامل (b_i).

إذا كان نموذج الانحدار يتكون من متغيرين فقط فيمكن حساب قيمة $S.E_{bi}$ أيضا من العلاقات التالية:

$$S.E_{b1} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-m-1} \cdot \frac{\Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 \cdot \Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 - \left(\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)\cdot(x_{2i}-\bar{x}_2)\right)^2}}$$

$$S.E_{b2} = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-m-1} \cdot \frac{\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 \cdot \Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 - \left(\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)\cdot(x_{2i}-\bar{x}_2)\right)^2}}$$

$$S.E_a = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\hat{y})^2}{n-m-1} \cdot \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_1^2 \cdot \Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2 + \bar{x}_2^2 \cdot \Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 - 2\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)\cdot(x_{2i}-\bar{x}_2)}{\Sigma(x_{1i}-\bar{x}_1)^2 \cdot \Sigma(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}\right]}$$

.بمقارنة قيمة(t_{bi}) المحسوبة من إحدى العبارات السابقة بقيمتها المستخرجة من الجدول (t_{tab}) يمكننا أن نحكم على المعنوية الإحصائية للمعامل(b_i). إذا كانت $t_{reel} > t_{tab}$ فسيتم رفض فرضية (H_o) حول الطبيعة العشوائية لتكوين(b_i) . أما في حالة العكس فإنه يتأكد الطابع العشوائي لقيمة المعامل(b_i) التي حصلنا عليها ويكون من الأفضل في

مثل هذه الحالة التخلي عن إدخال المتغير(x_i) المرافق لـــ(b_i) في معادلة الانحدار المقترحة. نفس التحليل بالنسبة ل (a).

5 – حساب متوسط معامل المرونة ($\bar{E}$):

من أجل تقدير نسبة تأثير أي متغير مستقل (x_i) على المتغير التابع(y_i) يتم حساب معامل المرونة ($\bar{E}_{yxj}$) كما يلي : $\bar{E}_{yxj} = b_j . \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$

حيث أن:

b_j : معامل المتغير X_j في معادلة الانحدار.

$\bar{y}$: القيمة المتوسطة للمتغير التابع (y_i)

$\bar{x}_i$: القيمة المتوسطة للمتغير المستقل المعني x_i

II -1 -3 الانحدار الجزئي:

*** معادلات الانحدار الجزئي:**

المقصود بالانحدار الجزئي، عند دراسة نماذج الانحدار المتعددة، هو حصر علاقة المتغير التابع(y_i) بأحد المتغيرات المستقلة(x_i) الداخلة في تكوين معادلة الانحدار المدروسة. فمعادلة الانحدار الجزئية هي تلك المعادلة التي تجمع بين المتغير التابع(y_i) و أحد المؤشرات (x_i) فقط مع تثبيت المؤشرات المستقلة الأخرى، الداخلة في تكوين معادلة الانحدار المدروسة، عند مستواها المتوسط. بهذه الطريقة نحول نموذج انحدار متعدد إلى نموذج انحدار آخر يسمى جزئي يميز العلاقة بين المتغير التابع و أحد المتغيرات المستقلة (x_i) فقط.

إذا كانت لدينا معادلة الانحدار المتعددة التالية:

$y_i = a + b_1 + b_2 + \ldots + b_n x_n + \varepsilon$ ، نستطيع أن نستخرج منها معادلات الانحدار الجزئية بالنسبة لـــ ($x_n, \ldots, x_2, x_1$) كالتالي:

$$y_{x_1\overline{(x_2, x_3, \ldots, x_n)}} = f(x_1) = a + b_1 x_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + \ldots\ldots + b_n\bar{x}_n$$

وهي تعني معادلة الانحدار الجزئي لـــ(y) على(x_1) مع بقاء المؤشرات الأخرى ثابتة.

$$y_{x_2\overline{(x_1, x_3, \ldots\ldots, x_n)}} = f(x_2) = a + b_1\overline{x_1} + b_2 x_2 + \ldots + b_n\bar{x}_n$$

هي معادلة الانحدار الجزئي لـــ (y) على (x_2) مع بقاء المؤشرات الأخرى ثابتة.

$$y_{x_n\overline{(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1})}} = f(x_n) = a + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \ldots\ldots + b_{n-1}\bar{x}_{n-1} + b_n x_n$$

معادلة الانحدار الجزئي ل (y) على (x_n) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة. عندما نعوض في هذه المعادلات المؤشرات المثبتة المعنية بقيم وسطها الحسابي، فإنها تأخذ شكل معادلات انحدار خطية بسيطة أي :

$$\begin{cases} y_{x_1\overline{(x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)}} = A_1 + b_1 x_1 \\ y_{x_2\overline{(x_1, x_3, \ldots\ldots, x_n)}} = A_2 + b_2 x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{x_n\overline{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})}} = A_n + b_n x_n \end{cases}$$

حيث أن:

$$\begin{cases} A_1 = a + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + \ldots\ldots + b_n\bar{x}_n \\ A_2 = a + b_1\bar{x}_1 + b_3\bar{x}_3 + \ldots\ldots + b_n\bar{x}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = a + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \ldots\ldots + b_{n-1}\bar{x}_{n-1} \end{cases}$$

بعكس نماذج الانحدار البسيطة (ذات متغير مستقل واحد) ، نماذج الانحدار الجزئية توفر إمكانية حصر تأثير متغير مستقل واحد على المتغير الناتج(y)، نظرا لأن المؤشرات المستقلة الأخرى هي مثبتة عند مستوى محدد. نتيجة تأثير المتغيرات المثبتة تكون محصورة في هذه الحالة في المعامل الحر (A) .

باستعمال معادلات الانحدار الجزئية بالمعنى المشار إليه أعلاه يمكن حساب معاملات المرونة الجزئية كالتالي:

$$\bar{E}_{yxi} = b_i \cdot \frac{x_i}{\hat{y}_{x_i}\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \bar{x}_n)}$$

حيث :

b_i : معاملات الانحدار للمؤشرات (x_i) في معادلة الانحدار المتعددة.

$y_{xi}(\bar{x}_1, \bar{x}_1, \dots\dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \bar{x}_n)$: معادلة الانحدار الجزئية بالنسبة للمتغير(x_i) مع تثبيت المتغيرات ($x_1, x_2, \dots\dots, x_{i-1}, x_{i+1}$, x_n).

* الارتباط الجزئي:

الارتباط الجزئي يميز متانة العلاقة بين الظاهرة المدروسة، ممثلة بالمتغير الناتج(yi) وأحد المؤشرات المؤثرة فيها ممثلا بأحد المتغيرات المستقلة(xi)، مع تثبيت قيم المؤشرات الأخرى المؤثرة في نموذج الانحدار المدروس عند مستوى معين.

إن مقياس الارتباط الجزئي هو عبارة عن مقدار انخفاض تباين التمثيل (تباين الخطأ المرتكب S^2) نتيجة إدخال مؤشر إضافي في معادلة الانحدار. يقاس الارتباط الجزئي لمؤشر ما(x_i) بقسمة مقدار التغير في

تباين التمثيل نتيجة إدخال هذا المؤشر في معادلة الانحدار على قيمة تباين التمثيل قبل إدخال هذا المؤشر.

مثال: نفترض أن علاقة كمية الإنتاج(y) بقيمة الإنفاق على عنصر العمل(x_1) كانت ممثلة بالمعادلة التالية:

$\hat{y}_{x1} = 27,5 + 3,5x_1$. في هذه الحالة تكون قيمة تباين الخطأ المرتكب هي: $S^2_{yx1} = \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{n}$.

نفترض أننا أدخلنا في معادلة الانحدار مؤشر إضافي x_2 – مستوى التجهيز التقني للإنتاج، فنحصل على معادلة الانحدار التالية:

$$\hat{y}_{x1x2} = 20,2 + 2,8x_1 + 0,2x_2$$

قيمة تباين الخطأ المرتكب لهذه المعادلة تكون، بطبيعة الحال،أقل من مثيلتها في المعادلة السابقة.

نفترض أن : $S^2_{yx1x2} = 3,7$ و $S^2_{yx1} = 6$.

كلما زاد عدد المؤشرات(x_i) الداخلة في نموذج الانحدار كلما انخفضت قيمة تباين التمثيل. إن انخفاض قيمة تباين التمثيل نتيجة إضافة المؤشر (x_2) إلى النمـــوذج تســـاوي: $S^2_{yx1} - S^2_{yx1x2} = 6 - 3,7 = 2,3$ كلما كانت نسبة قيمة هذا الانخفاض إلى قيمة تباين التمثيل قبل إدخال المتغير الإضافي(x_2) أكبر كلما كانت علاقة ارتباط (x_2) بـــ(y) مع ثبات قيمة x_1 أقوى. بمعنى آخر، الفرق في قيمة تباين التمثيل قبل وبعد إدخال المتغير(x_2) عند قسمتها على قيمة تباين التمثيل قبل إدخال(x_2) تقيس قيمة أو درجة الارتباط الجزئي لـــ (x_2) بـــ(y) مع عزل تأثير المؤشر (x_1) على (y_i).

لذلك فالجذر التربيعي لهذه النسبة هو الذي يسمى بمعامل الارتباط الجزئي، والذي يعكس "صافي" متانة علاقة بـــ(y) (x$_2$). إن التأثير الصافي لـــ (x$_2$) على المتغير الناتج (y) يمكن إذن قياسه كالتالي:

$$r_{yx2}(\overline{x_1}) = \sqrt{\frac{S^2_{y.x_1} - S^2_{y.x_1x_2}}{S^2_{y.x_1}}}$$

حيث أن المقدار بين قوسين ($\overline{x_1}$) في العبارة السابقة يعني تثبيت المتغير(x_1) عند مستواه المتوسط. بنفس الطريقة يمكن قياس التأثير الصافي للمؤشر(x_1) على المتغير الناتج($\hat{y}_i$) (الارتباط الجزئي لـــ x_1بـــy):

$$r_{yx1}(\overline{x_2}) = \sqrt{\frac{S^2_{y.x_2} - S^2_{y.x_1x_2}}{S^2_{y.x_2}}}$$

إذا افترضنا أن $S_{\hat{y}x2} = 5$ مثلا، فإن مقاييس الارتباط الجزئي لمعادلة الانحدار السابقة

$\hat{y}_{x1x2} = 20,2 + 2,8x_1 + 0,2x_2$ تكون :

$$r_{yx1}(\overline{x_2}) = \sqrt{\frac{5-3,7}{5}} = 0,51;\ r_{yx2}(\overline{x_1}) = \sqrt{\frac{6-3,7}{6}} = 0,619$$

عند مقارنة هذين القيمتين، يتضح أن مستوى تجهيز الإنتاج(x_2) في المؤسسة المعنية هو الذي له أكبر تأثير على مستوى الإنتاج (y_i).

لقد أشرنا سابقا أن معامل الارتباط المتعدد هو :

$$R_{yx1,\, x2,\, ..\, ,\, xn} = \sqrt{1 - \frac{S^2_{y.\hat{y}}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}}$$

ومعامل التحديد المتعدد (مربع هذه القيمة) هو : $R^2 = 1- \frac{S^2_{y.\hat{y}}}{\sigma^2_y}$

إذا عبرنا عن تباين الخطأ المرتكب بواسطة معامل التحديد المتعدد(R^2)

فنحصل على العبارة التالية: $S^2_{\hat{y}y} = \sigma^2_y . (1- R^2)$

وبالتالي فإن عبارة حساب معامل الارتباط الجزئي لكلا المتغيرين(x_2) ،(x_1) ، تأخذ الشكل التالي:

$$r_{yx1}(\bar{x}_2) = \sqrt{\frac{S^2_{y.x_2} - S^2_{y.x_1x_2}}{S^2_{y.x_2}}} = \sqrt{1 - \frac{S^2_{y.x_1x_2}}{S^2_{y.x_2}}} = \sqrt{1 - \frac{1-R^2_{y.x_1,x_2}}{1-R^2_{yx_2}}}$$

$$r_{yx2}(\bar{x}_1) = \sqrt{1 - \frac{1-r^2_{yx_1,x_2}}{1-r^2_{yx_1}}}$$

بصفة عامة إذا كانت معادلة الانحدار تتكون من(n) مؤشر كالتالي:

$y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + .. + b_nx_n + \varepsilon$ ، فإن معامل الارتباط الجزئي، الذي يقيس مستوى تأثير(x_1) على(y) مع بقاء المؤشرات الأخرى ثابتة عند نفس المستوى يمكن حسابه من العبارة التالية :

$$r_{yxi}(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n}) = \sqrt{1 - \frac{1-R^2_{yx_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n}}{1-R^2_{yx_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n}}}$$

حيث أن:

$r_{yxi}(\overline{x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n})$: هو معامل ارتباط(x_i) مع(y) مع بقاء العوامل الأخرى$(x_1, x_2, x_3, .. , x_{i-1}, x_{i+1}, .. , x_n)$ ثابتة عند مستوى معين.

$R^2_{yx1,x2,\dots,xi,\dots,xn}$: معامل التحديد المتعدد (مربع معامل الارتباط المتعدد) لكل المؤشرات (x_p) مع(y).

$R^2_{yx1,x2,\dots,xi-1,xi+1,\dots,xn}$: نفس المقياس السابق (معامل التحديد المتعدد أو مربع معامل الارتباط المتعدد) لكل المؤشرات(x_p) ما عدا المؤشر(x_i).

إن الأهمية التطبيقية لمعاملات الارتباط الجزئية تكمن في أنها تمكن من اختيار وفرز المؤشرات (x_i) الأثر تأثيرا على المؤشر الناتج(y). أي توضح أهمية ودور إدخال المؤشرات المختلفة(x_i) في نموذج الانحدار المقترح. بالإضافة إلى ذلك فإن هذه المعاملات تعطينا صورة صافية لمدى تأثير كل مؤشر مستقل على المؤشر الناتج نظرا لعزل تأثير باقي المؤشرات المستقلة. على سبيل المثال، عند دراسة علاقة تأثر تكلفة استخراج الفحم(x_1) بحجم الإنتاج(y) في أحد مناجم الفحم، كان معامل الارتباط الزوجي بينهما هو $r_{yx1} = -0,75$ وهو يعكس وجود علاقة ارتباطية عكسية قوية بين المؤشرين المذكورين. إذا أضفنا مؤشرا آخر وهو إنتاجية العمل(x_2) إلى نموذج الانحدار السابق فإن معامل الارتباط الجزئي لتكلفة استخراج الفحم بحجم الإنتاج $R_{yx1}(\,\overline{x_2}\,)$ مع تثبيت مؤشر إنتاجية العمل عند مستوى معين، أصبح يساوي :

$R_{yx1}(\overline{x}_2) = -0,58$. هذه القيمة تظهر بوضوح علاقة ارتباطية أقل مستوى بين التكلفة وحجم الإنتاج. إن هذا يعني أن علاقة تكلفة الإنتاج بحجم الإنتاج " تصفت "من تأثير إنتاجية العمل. أما إذا أدخلنا

مؤشرا ثالثا و هو قيمة رأس المال الثابت المستعمل في نموذج الانحدار المدروس وثبتنا قيمته عند مستوى ما، ثم حسبنا معامل الارتباط الجزئي لتكلفة الإنتاج(x_1) بالنسبة لحجم الإنتاج (y) فنلاحظ أن العلاقة الارتباطية بين المؤشرين المذكورين قد انخفضت أكثر:

$R_{yx1}(\overline{x_2}, \overline{x_3}) = -0{,}52$. إن قيمة معامل الارتباط الجزئي ل x_1 تظهر "تحييدا " أو "تصفية" العلاقة بين(y) و(x_1) من تأثير و(x_3) (x_2) .

ترتيب معامل الارتباط الجزئي:

ترتيب معامل الارتباط الجزئي يتحدد بعدد المؤشرات التي تم تثبيت قيمها و استبعاد تأثيرها على المؤشر التابع(y). مثال: $r_{yx1}(\overline{x_2})$ - هو معامل ارتباط جزئي من المرتبة الأولى. بينما معاملات الارتباط الزوجية فتعتبر معاملات ارتباط من الدرجة صفر. معاملات الارتباط الجزئية من المراتب العليا يمكن استخراج قيمهم من قيم معاملات الارتباط الجزئي الأقل مرتبة كالتالي:

$$r_{yxi(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_p})} =$$

$$= \frac{r_{yx_i(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}})} - r_{yx_p(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}})} \times r_{x_i \cdot x_p(\overline{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}})}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_p(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})}).(1 - r^2_{x_i \cdot x_p(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})})}}$$

مثال: إذا كان لدينا مؤشرين مستقلين فقط و($i=1$)، فإن العبارة السابقة تأخذ الشكل التالي:

$$r_{yx_1(\overline{x_2})} = \frac{r_{y.x_1} - r_{yx_2} \times r_{x_1.x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_2}).(1 - r^2_{x_1.x_2})}}$$

إذا كان $i = 2$ فإن العبارة تصبح: $r_{yx_2(\overline{x_1})} = \dfrac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \times r_{x_1 x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_1}).(1 - r^2_{x_1 x_2})}}$

إذا كانت لدينا معادلة الانحدار التالية، المتضمنة ثلاث مؤشرات مستقلة، معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الثانية تحسب باستعمال معاملات الارتباط الجزئية من الدرجة الأولى:

$. y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \varepsilon$

يمكن استخراج ثلاث معاملات ارتباط جزئية من المرتبة الثانية كالتالي:

$$r_{yx_1(\overline{x_2, x_3})} \; ; \; r_{yx_2(\overline{x_1, x_3})} \; ; \; r_{yx_3(\overline{x_1, x_2})}$$

فلو أردنا مثلا حساب معامل الارتباط الجزئي عندما $(i = 1)$ فيمكن استعمال العبارة السابقة كالتالي:

$$r_{yx_1(\overline{x_2,x_3})} = \frac{r_{yx_1(\overline{x}_2)} - r_{yx_3(\overline{x}_2)} . r_{yx_1 x_3(\overline{x}_2)}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_3(\overline{x}_2)}) . (1 - r^2_{x_1x_3(\overline{x}_2)})}}$$

II - 2 - تطبيقات:

مثال 1:

المعطيات الواردة في الجدول أدناه خاصة بالنفقات الاستهلاكية المباشرة (y_i) لأسرة ما، دخلها الشهري(x_1) و كذلك مدخراتها الشهرية(x_2). إذا افترضنا أن علاقة (y_i) بالمؤشرين(x_2,x_1) يمكن التعبير عنها بواسطة نموذج انحدار خطي متعدد.

المطلوب :

1- تقدير النموذج المطلوب.

2- تقييم جودة تمثيل هذا النموذج.

المدخرات الشهرية (x_i)	الدخل الشهري (x_2)	(y_i) النفقات الاستهلاكية المباشرة
10	115	80
15	130	83
30	150	86
45	160	97
50	205	120
75	250	150
100	310	160
140	355	172

الحـــــل:

1-تقدير النموذج المقترح : إذا كان نموذج الانحدار المقترح لتمثيل العلاقة محل الدراسة هو خطي متعدد من الشكل:

$$\hat{y}_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + .. + b_nx_n$$

فإنه من أجل حساب معاملاته، نقوم بحساب قيم المحددات: Δ , Δ_a , Δ_{b1} . Δ_{b2} , لحساب هذه المقادير نقوم بإعداد الجدول التالي:

	y_i	x_1	x_2	$y_i.x_1$	$y_i.x_2$	$x_1.x_2$	x_1^2	x_2^2
	80	115	10	9200	800	1150	13225	100
	83	130	15	10790	1245	1950	16900	225
	86	150	30	12900	2580	4500	22500	900
	97	160	45	15520	4365	7200	25600	2025
	120	205	55	24600	6600	11275	42025	3025
	150	250	75	37500	11250	18750	62500	5625
	160	310	100	49600	16000	31000	96100	10000
	172	355	140	61060	24080	49700	126025	19600
Σ	948	1675	470	221170	66920	125525	404875	41500
المتوسط الحسابي	118,5	209,38	58,75	27646,25	8365	15690,63		
σ	35,1	82,28	41,66					
σ^2	1230	6771,48	1735,9					

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1675 & 470 \\ 1675 & 404875 & 125525 \\ 470 & 125525 & 41500 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 135082500$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \Sigma y & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma y.x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1.x_2 \\ \Sigma y.x_2 & \Sigma x_1.x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 948 & 1675 & 470 \\ 221170 & 404875 & 125525 \\ 66920 & 125525 & 41500 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_a = 1569855000 \quad ; \quad a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = 11,62$$

$$\Delta_{b1} = \begin{vmatrix} 8 & 948 & 470 \\ 1675 & 221170 & 125525 \\ 470 & 66920 & 41500 \end{vmatrix} = 84762000$$

$$\Delta_{b2} = \begin{vmatrix} 8 & 1675 & 948 \\ 1675 & 404875 & 221170 \\ 470 & 125525 & 66920 \end{vmatrix} = - 56334000$$

$$b_2 = \frac{\Delta_{b2}}{\Delta} = -0{,}42 \quad ; \quad b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta} = 0{,}62$$

إذن معادلة الانحدار المقترحة لتمثيل علاقة الإنفاق الاستهلاكي للأسرة بدخلها و مدخراتها الشهرية تكون كالتالي :

$$\hat{y}_i = 11{,}62 + 0{,}63x_1 - 0{,}42x_2$$

- حساب معامل الارتباط المتعدد ($R_{yx1,x2}$) : $R_{yx1,x2} = \sqrt{1-\frac{A}{B}}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix} \quad , B = \begin{vmatrix} 1 & r_{x1x2} \\ r_{x1x2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = 1 + 2r_{yx1} \cdot r_{yx2} \cdot r_{x1x2} - (r^2_{yx1} + r^2_{yx2} + r^2_{x1x2})$$

$$B = 1 - r^2_{x1x2}$$

$$r_{yx1} = \frac{\overline{y \times x_1} - \bar{y} \times \bar{x}_1}{\sigma_{x1} \times \sigma_y} = \frac{2834{,}72}{2888} = 0{,}98$$

$$r_{yx2} = \frac{\overline{y \times x_2} - \bar{y} \times \bar{x}_2}{\sigma_{x_2} \times \sigma_y} = \frac{1403{,}125}{1462{,}266} = 0{,}96$$

$$r_{x1x2} = \frac{\overline{x_1 \times x_2} - \bar{x}_1 \times \bar{x}_2}{\sigma_{x_1} \times \sigma_{x_2}} = \frac{3389{,}55}{3427{,}78} = 0{,}98$$

$$\mathbf{A = 1 + 2\,(0{,}98)\,.\,(0{,}96)\,.\,(0{,}98) - [\,(0{,}98)^2 + (0{,}96)^2 + (0{,}98)^2\,]}$$

$$A = 0{,}001568 \;\; ; \;\; B = 1 - r^2_{x1x2} = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

$$R = \sqrt{1-\frac{A}{B}} = \sqrt{1-\frac{0{,}001568}{0{,}04}} = 0{,}98$$

عند مقارنة معامل الارتباط المتعدد $(R_{yx1,x2})$ بقيم معاملات الارتباط الزوجية (r_{yxi})، نجد أن شرط $R_{yx1x2} \geq \max r_{yxi}$ محقق $(0,98 = 0,98)$.

إن قيمة الارتباط المتعدد المحصل عليها $(R = 0,98)$ تشير إلى وجود علاقة ارتباطيه قوية جدا بين مصاريف الاستهلاك المباشرة للأسرة المشار إليها ومقدار راتبها الشهري و مدخراها.

- استخراج معامل التحديد (R^2):

ما دام أن نموذج الانحدار المقترح لتمثيل العلاقة محل الدراسة هو خطي متعدد، فإن معامل التحديد نحسبه بتربيع قيمة معامل الارتباط (R_{yx1x2}) :

$$R^2_{yx1x2} = (0,98)^2 = 0,96$$

هذه القيمة لمعامل التحديد تعكس الطبيعة الموضوعية لمعادلة الانحدار المقترحة حيث أنها تمثل الظاهرة المدروسة تمثيلا جيدا.

مثال 2 :

لتكن البيانات التالية الخاصة بظاهرة ما(y_i) و العوامل المؤثرة فيها (x_1,x_2). إذا افترضنا أن نوع العلاقة الانحدارية بينهما هي خطية من الشكل: $y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$

المطلوب

1- تقدير هذا النموذج.

2- حساب معامل الارتباط ومعامل التحديد وتقييم جودة تمثيل هذا النموذج.

رقم	y_i	x_1	x_2
1	402	31	15
2	399	27	14
3	401	29	15
4	413	23	17
5	406	26	17
6	406	24	16
7	407	28	15
8	403	25	17
9	416	22	18
10	407	25	16

الحـــــل:

1- حساب معاملات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

من المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى لدينا:

$$\begin{cases} \Sigma y = n.a + b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2 \\ \Sigma y.x_1 = a.\Sigma x_1 + b_1\Sigma x_1^2 + b_2\Sigma x_1.x_2 \\ \Sigma y.x_2 = a.\Sigma x_2 + b_1\Sigma x_2.x_1 + b_2.\Sigma x_2^2 \end{cases}$$

حل هذه المعادلات يسمح بالحصول على قيم الثوابت b_2,b_1,a التي تجعل $S(y_i-\hat{y}_i)^2 = min$. لأجل هذا الغرض نقوم بتحضير الجدول التالي:

الرقم	y_i	x_1	x_2	$y_i.x_1$	$y_i.x_2$	$x_1.x_2$	x_1^2	x_2^2
1	402	31	15	12462	6030	465	961	225
2	399	27	14	10773	5586	378	729	196
3	401	29	15	11629	6015	435	841	225
4	413	23	17	9499	7021	391	529	289
5	406	26	17	10556	6902	442	676	289
6	406	24	16	9744	6496	384	576	256
7	407	28	15	11396	6105	420	784	225
8	403	25	17	10075	6851	425	625	289
9	416	22	18	9152	7488	396	484	324
10	407	25	16	10175	6512	400	625	256
Σ	4060	260	160	105461	65006	4136	6830	2574
الوسط الحسابي	406	26	16	10546,1	6500,6	413,6		
σ	5	2,646	1,183					
σ^2	25	7	1,4					

نحسب قيمة المحدد الرئيسي(Δ) لجملة المعادلات السابقة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1.x_2 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_1.x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 260 & 160 \\ 260 & 6830 & 4136 \\ 160 & 4136 & 2574 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \Sigma y & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma y.x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1.x_2 \\ \Sigma y.x_2 & \Sigma x_1.x_2 & \Sigma x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4060 & 260 & 160 \\ 105461 & 6830 & 4136 \\ 65006 & 4136 & 2574 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{b1} = \begin{vmatrix} 10 & 4060 & 160 \\ 260 & 105461 & 4136 \\ 160 & 65006 & 2574 \end{vmatrix} ; \Delta_{b2} = \begin{vmatrix} 10 & 260 & 4060 \\ 260 & 6830 & 105461 \\ 160 & 4136 & 65006 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 4040 \ ; \Delta_a = 1578520 \ ; \Delta_{b1} = -\ 2820 \ ; \ \Delta_{b2} = 8440$$

$$b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta} = \frac{-2820}{404} = -\ 0,698$$

$$b_2 = \frac{\Delta_{b2}}{\Delta} = \frac{8440}{4040} = 2,1; \ a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{1578520}{4040} = 390,72$$

بحساب المعاملات(b_2, b_1, a) تأخذ معادلة الانحدار المقدرة المقترحة الشكل التالي: $\hat{y}_i = 390,72 - 0,698x_1 + 2,1x_2$

إن هذه المعادلة هي أفضل المعادلات الخطية التي تمثل الظاهرة المدروسة أفضل تمثيل.

2- تقييم جودة المعادلة الانحدارية المحصل عليها:

* حساب معامل الارتباط المتعدد (R_{yx1x2}):

معامل الارتباط الخطي المتعدد يحسب من العلاقة التالية :

$$R_{yx1,x2,..,xn} = \sqrt{1-\frac{A}{B}}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix} \; ; \; B = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = 1+ 2.r_{yx1} \, . \, r_{yx2} \, . \, r_{x1x2} \; - (r^2_{yx1} + r^2_{yx2} + r^2_{x1x2})$$

$$B = 1- r^2_{x1x2}$$

$$r_{yx1} = \frac{\overline{y \times x_1} - \overline{x}_1 \times \overline{y}}{\sigma_{x_1} \times \sigma_y} = - 0{,}748$$

$$r_{yx2} = \frac{\overline{y \, . \, x_2} - \overline{y} \, . \, \overline{x}_2}{\sigma_{x_2} \, . \, \sigma_y} = 0{,}778 \;\; ; \;\; r_{x1x2} = - 0{,}767$$

$$A = 1+ 2 (- 0{,}748).(0{,}778).(- 0{,}767)-$$
$$- \; [(-0{,}748)^2 + (0{,}778)^2+(-0{,}767)^2]$$

$$A = 0{,}1396 \quad ; \quad B = 1- 0{,}588 = 0{,}42$$

$$R_{yx1,x2} = \sqrt{1 - \frac{A}{B}} = 0{,}817$$

إذا ما قارنا قيمة معامل الارتباط المتعدد بقيم معاملات الارتباط الزوجية فنجد أنه يحقق الشرط :

$$R_{yx1,x2} \geq \max \; r_{yxi} \quad : 0{,}817 \geq 0{,}778$$

نستطيع أن نصف العلاقة بين المؤشر التابع(y) والمؤشرين المستقلين(x_1,x_2) بأنها مقبولة، وأن علاقة (y) بـ (x_2,x_2) مع بعض هي أقوى من علاقة(y) بكل من المتغيرين المستقلين على حدة.

- حساب معامل التحديد (R^2):

معامل التحديد في حالة نموذج الانحدار الخطي المتعدد يمكن حساب قيمته بتربيع قيمة معامل الارتباط المتعدد السابقة:

$R^2 = R^2_{yx1,x2} = (0{,}817)^2 = 0{,}667$. هذه القيمة لمعامل التحديد تدل على أن معادلة الانحدار الخطية المقترحة لا تمثل العلاقة بين (y_i) و (x_i) تمثيلا جيدا، أو أن هناك عوامل أخرى أساسية تؤثر تأثيرا كبيرا على (y_i) لم تأخذ بعين الاعتبار.

مثـــال 3 :

لتكن المعطيات التالية التي تخص تطور الكميات المعروضة من سلعة ما (y_i)، الثمن الذي تباع به هذه السلعة (x_1) وإعانات الإنتاج (x_2) (كما في الجدول أدناه. إذا افترضنا أن العلاقة المدروسة تتطور وفق نموذج انحدار متعدد غير خطي من الشكل: $\hat{y}_i = a.x_1^{b1} \, . \, x_2^{b2}$

المطلوب:

1- حساب معاملات هذا النموذج و تقديره .

2 - تقييم جودة تمثيل هذا النموذج للعلاقة المدروسة من خلال حساب معامل الارتباط، معامل التحديد المتعدد ومقياس فيشر (F).

y_i	x_1	x_2		y_i	x_1	x_2
200	180	60		224	240	68
210	185	63		253	251	85
220	191	69		257	259	87
222	198	72		251	265	87
220	203	67		275	273	92
241	212	74		282	281	92
250	222	80		267	287	89
249	233	83				

الحـــل:

1 - حساب معاملات النموذج المقترح:

لقد رأينا سابقا، عندما تعرضنا لتقدير نماذج الانحدار المتعددة المنحنية، أنه من أجل تقدير معاملات مثل هذا النموذج يجب أولا تحويله إلى شكله الخطي وذلك بتحويل متغيراته الأصلية إلى متغيرات لوغاريتمية.

$$\hat{y}_i = a x_1^{b1} \cdot x_2^{b2}$$

$$\log \hat{y}_i = \log a + b_1.\log x_1 + b_2.\log x_2$$

نضع : $\log \hat{y}_i = \hat{Y}_i \; ; \; \log a = A \; ; \; \log x_1 = X_1 \; ; \; \log x_2 = X_2$

يصبح الشكل الخطي للمعادلة السابقة كالتالي: $\hat{Y}_i = A + b_1X_1 + b_2X_2$

$$S = \Sigma(Y - \hat{Y}_i)^2 = \min$$

$$S = \Sigma(Y_i - A - b_1X_1 - b_2X_2)^2 = \min$$

بعد إيجاد المشتقات الجزئية بالنسبة للثوابت (b_2,b_1,A) ومساواتها بالصفر نحصل على المعادلات التي تسمح بحساب الثوابت المذكورة .

$$\begin{cases} \Sigma Y_i = n.A + b_{1\Sigma}X_1 + b_{2\Sigma}X_2 \\ \Sigma Y_i.X_1 = A.\Sigma X_1 + b_1.\Sigma X_1^2 + b_2.\Sigma X_1X_2 \\ \Sigma Y_i.X_2 = A.\Sigma X_2 + b_1.\Sigma X_2X_1 + b_2.\Sigma X_2^2 \end{cases}$$

من أجل حساب هذه المعاملات ، نقوم بإعداد الجدول التالي:

	y	x_1	x_2	$y.x_1$	$y.x_2$	$x_1.x_2$	x_1^2	x_2^2	$\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
	2,3	2,2553	1,778	5,19	4,1	4	5,1	3,16	204,73	22,37
	2,3222	2,2672	1,7993	5,26	4,18	4,1	5,14	3,24	211	1
	2,344	2,281	1,8388	5,34	4,3	4,19	5,2	3,38	222,25	5,1
	2,3464	2,2966	1,8573	5,39	4,36	4,26	5,27	3,45	228,83	46,65
	2,3424	2,3075	1,8261	5,41	4,28	4,21	5,32	3,34	222,23	4,97
	2,382	2,3263	1,8692	5,54	4,45	4,35	5,4	3,49	235,65	28,62
	2,3979	2,3463	1,9031	5,63	4,56	4,47	5,51	3,62	247,44	6,55
	2,3962	2,3673	1,9191	5,67	4,6	4,54	5,6	3,68	254,75	33,52
	2,35	2,38	1,8325	5,59	4,31	4,36	5,66	3,36	232,78	77,1
	2,403	2,3996	1,9294	5,77	4,64	4,63	5,76	3,72	262,3	86,49
	2,4099	2,4133	1,9395	5,82	4,67	4,68	5,83	3,76	267,25	105,1
	2,3997	2,4232	1,9395	5,81	4,65	4,7	5,87	3,76	268,68	312,6
	2,4393	2,4362	1,9638	5,94	4,79	4,78	5,94	3,86	278	9
	2,45	2,4487	1,9638	6,0	4,81	4,81	6	3,86	279,92	4,32
	2,4265	2,4579	1,9494	5,96	4,73	4,79	6,04	3,8	276,8	96
Σ	35,71	35,41	28,31	84,33	67,43	66,87	83,64	53,48	-	839,4
ق.م	2,38	2,36	1,887							
σ	0,0429	0,066	0,06							
σ^2	0,00184	0,044	0,036							

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 35,41 & 28,31 \\ 35,41 & 83,64 & 66,87 \\ 28,31 & 66,87 & 53,48 \end{vmatrix} \; ; \Delta_A = \begin{vmatrix} 35,71 & 35,41 & 28,31 \\ 84,33 & 83,64 & 66,87 \\ 67,43 & 66,87 & 53,48 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{b1} = \begin{vmatrix} 15 & 35,71 & 28,31 \\ 35,41 & 84,33 & 66,87 \\ 28,31 & 67,43 & 53,48 \end{vmatrix} ; \Delta_{b2} = \begin{vmatrix} 15 & 35,41 & 35,71 \\ 35,41 & 83,64 & 84,33 \\ 28,31 & 66,87 & 67,43 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta = 0,01282 \; ; \; \Delta_A = 0,011739 \; ; \; \Delta_{b1} = 0,00299 \; ; \; \Delta_{b2} = 0,006253}$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = 0,9157; \; b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta} = 0,234 \; ; \; b_2 = \frac{\Delta_{b2}}{\Delta} = 0,488$$

إذن معادلة الانحدار المقترحة في شكلها الخطي هي:

$$\hat{Y}_i = 0,9157 + 0,234x_1 + 0,488x_2$$

وفي شكلها الأصلي هي:

$$\hat{y}_i = 10^{0,9157} \,.\, x_1^{\,0,234} \,.\, x_2^{\,0,488} = 8,236 \,.\, x_1^{\,0,234} \,.\, x_2^{\,0,488}$$

* حساب معامل الارتباط المتعدد غير الخطي $(R_{yx1,x2})$:

$$R_{yx1,x2} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \hat{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{839,37}{8330,6}} = 0,95$$

هذه القيمة لمعامل الارتباط تعكس وجود علاقة ارتباطية قوية بين (y_i) والمتغيرات المستقلة(x_1), (x_2) .

*حساب معامل التحديد المتعدد (R^2) :

$$R^2 = R^2_{yx1,x2} = (0,95)^2 = 0,90$$

إن قيمة معامل التحديد المتعدد تدل على أن نموذج الانحدار المتعدد المقترح يمثل العلاقة بين (y_i) و (x_i) تمثيلا جيدا، حيث أن 90% من التغيرات التي تحدث في المتغير (y_i) ناتجة عن التغير في(x_i) .

* حساب مقياس فيشر (F):

نستعمل مقياس فيشر للتأكد من موضوعية قيمة معامل التحديد المحصل عليها أعلاه واختبار إمكانية استخدامها كمقياس لعدم عشوائية معادلة الانحدار المقترحة.

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1 - R^2} \,.\, \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,90}{1 - 0,90} \times \frac{15 - 2 - 1}{2} = 9 \,.\, 6 = 54$$

نستخرج قيمة (F_{tab}) من جدول التوزيع الإحصائي لفيشر المقابلة لدرجات حرية عددها $V_1 = m = 2$ و $V_2 = n\text{-}m\text{-}1 = 12$

ومستوى معنوية$\alpha = 0,05$.

هذه القيمة هي: $F_{tab} = 3,88$

عند مقارنة القيمتين نجد أن: $F_{reel} > F_{tab}$: $54 > 3,88$

يجب إذن رفض فرضية (H_o) حول الطبيعة العشوائية لتشكيل معادلة الانحدار المقترحة. إن نتيجة اختبار فيشر تؤكد أن معادلة التمثيل المقترحة جيدة وأن قيمة معامل التحديد المحصل عليها هي قيمة موضوعية وبالإمكان استعمالها كمقياس لمدى فعالية معادلة الانحدار المقترحة في تمثيل العلاقة المدروسة.

مثال 4:

لدينا المعطيات التالية الخاصة بـــ 10 شركات تنتمي إلى هولدينغ الصناعات الكيميائية. (y_i): الأرباح بالمليون دولار، x_1 : إنتاجية العامل بالوحدة، x_2 :نسبة الإنتاج المخصص للتصدير (%).

إذا افترضنا أن العلاقة بين(y) و (x_i) يمثلها نموذج انحدار خطي متعدد من الشكل: $y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$

i	y_1	x_1	x_2
1	2	11	3
2	1	10	2
3	3	12	4
4	8	18	10
5	7	15	11
6	5	13	6
7	4	1	5
8	6	15	7
9	7	16	10
10	7	17	12

المطلوب:

1 - تقدير هذا النموذج.

2- تقييم جودة تمثيل هذا النموذج للعلاقة بين x_i، y_i

3 -كون الشكل المعياري لهذا النموذج الانحداري وأوجد معاملاته(β_i) .

الحـــــل:

1- تقدير النموذج:

لدينا جملة المعادلات الطبيعية لطريقة المربعات الصغرى في حالة نموذج انحدار متعدد خطي كالتالي :

$$\begin{cases} \Sigma y = n.a + b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2 \\ \Sigma y.x_1 = a.\Sigma x_1 + b_1.\Sigma x_1^2 + b_2.\Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma y.x_2 = a.\Sigma x_2 + b_1.\Sigma x_1 x_2 + b_2.\Sigma x_2^2 \end{cases}$$

من أجل إيجاد قيم b_2, b_1, a نقوم بحل هذه المعادلات باستعمال طريقة المحددات.

i	y	x_1	x_2	$y.x_1$	$y.x_2$	$x_1.x_2$	x_1^2	x_2^2
1	2	11	3	22	6	33	121	9
2	1	10	2	10	2	20	100	4
3	3	12	4	36	12	48	144	16
4	8	18	10	144	0	180	324	100
5	7	15	11	105	77	165	225	121
6	5	13	6	65	30	78	169	36
7	4	13	5	52	20	65	169	25
8	6	15	7	90	42	105	225	49
9	7	16	10	112	70	160	256	100
10	7	17	12	119	84	204	289	144
Σ	50	140	70	755	423	1058	2022	604
ق.م	5	14	7	75,5	42,3	105,8	202,2	60,4
σ	2,28	2,49	3,38					
σ^2	5,2	6,2	11,4					

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 140 & 70 \\ 140 & 2022 & 1058 \\ 70 & 1058 & 604 \end{vmatrix} ; \Delta_a = \begin{vmatrix} 50 & 140 & 70 \\ 755 & 2022 & 1058 \\ 423 & 1058 & 604 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{b1} = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 70 \\ 140 & 755 & 1058 \\ 70 & 423 & 604 \end{vmatrix} ; \Delta_{b2} = \begin{vmatrix} 10 & 140 & 50 \\ 140 & 2022 & 755 \\ 70 & 1058 & 423 \end{vmatrix}$$

$\Delta_a = -47960$; $a = -4{,}874$; $\Delta_{b1} = 5760$; $b_1 = 0{,}585$;
$\Delta b_2 = 2360$; $b_2 = 0{,}24$

معادلة الانحدار الممثلة للعلاقة بين الأرباح، إنتاجية العمل و كمية الإنتاج الموجهة للتصدير هي: $\hat{y}_i = -4{,}874 + 0{,}585x_1 + 0{,}24x_2$

2- تقييم جودة تمثيل هذه المعادلة للعلاقة المدروسة :

- حساب معامل الارتباط المتعدد ($R_{yx1,x2}$): $R_{yx1,x2} = \sqrt{1 - \frac{A}{B}}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & r_{y.x_1} & r_{y.x_2} \\ r_{x_1.y} & 1 & r_{x_1.x_2} \\ r_{x_2.y} & r_{x_2.x_1} & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1.x_2} \\ r_{x_2.x_1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = 1 + 2.r_{yx1} . r_{yx2} .r_{x1x2} - (r^2_{yx1} + r^2_{yx2} + r^2_{x1x2})$$
$$B = 1- r^2_{x1x2}$$

$$r_{yx1} = \frac{\overline{y . x_1} - \overline{x}_1 . \overline{y}}{\sigma_{x_1} \times \sigma_y} = \frac{75{,}5 - 5\times 14}{2{,}49 \times 2{,}28} = 0{,}9686$$

$$r_{yx2} = \frac{\overline{x_2 \cdot y} - \bar{y}.\bar{x}_1}{\sigma_{x_1} \times \sigma_y} = \frac{42,3 - 5\times 7}{3,38 \times 2,28} = 0,947$$

$$r_{x1x2} = \frac{\overline{x_1.x_2} - \bar{x}_1 .\bar{x}_2}{\sigma_{x1} \times \sigma_{x2}} = \frac{105,8 - 14\times 7}{2,49 \times 3,38} = 0,928$$

$$A = 1 + 2.(0,8755) - (2,748) = 2,751 - 2,748 = 0,003$$

$$B = 1 - 0,928^2 = 0,1388$$

$$R_{yx1,x2} = \sqrt{1 - \frac{0,003}{0,1388}} = 0,989$$

هذه القيمة لمعامل الارتباط تدل على وجود علاقة ارتباطية قوية جدا بين المتغيرات المستقلة(x_i) والمتغير التابع(y_i).

- معامل التحديد R^2 : $R^2 = R^2_{yx1,x2} = (0,989)^2 = 0,98$

وتدل قيمة R^2 على أن المؤشرات(x_2,x_1) لهم تأثير كبير جدا على المتغير y_i، حيث أن 98% من التغيرات التي تحدث في (y_i) يكون سببها التغير x_2,x_1 .

- اختبار فيشر (F):

للتأكد من موضوعية معامل الارتباط ومعامل التحديد في تقييم جودة تمثيل نموذج الانحدار المقترح، نجري اختبار(F).

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{n - m - 1}{m} = 49 . 7/2 = 171,5$$

$$F_{tab} = F_{0,05} (v_1 ,v_2) = F_{0,05} (2 , 7) = 4,74$$

$$F_{reel} > F_{tab} \quad : \quad (171,5 > 4,74)$$

يجب إذن رفض فرضية H_0 حول الطبيعة العشوائية لمعادلة الانحدار المقترحة، حيث أن معاملات هذه المعادلة تكونت نتيجة تأثير (x_i) على (y_i) وأنها بهذه الصفة موضوعية.

3- تكوين الشكل المعياري لمعادلة الانحدار السابقة:
من أجل صياغة الشكل المعياري للمعادلة الانحدارية السابقة يجب حساب المعاملات (β_i) للشكل المعياري لهذه المعادلة:

لدينا :
$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \times r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}} = \frac{0{,}9686 - 0{,}947 \times 0{,}928}{1 - 0{,}928^2} = 0{,}639$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx2} - r_{yx1} \times r_{x1x2}}{1 - r^2_{x1x2}} = \frac{0{,}947 - 0{,}9686 \times 0{,}928}{1 - 0{,}928^2} = 0{,}355$$

الشكل المعياري لمعادلة الانحدار هو: $t_{\hat{y}} = 0{,}639.t_{x1} + 0{,}355.t_{x2}$

للانتقال من الشكل المعياري لمعادلة الانحدار إلى شكلها الطبيعي نستخدم العلاقة التالية التي تسمح لنا بالانتقال من معاملات الشكل الأول إلى معاملات الشكل الثاني كالتالي :

$$b_1 = \beta_1 . \frac{\sigma_y}{\sigma_{x1}} = 0{,}639 . \frac{2{,}28}{2{,}49} = 0{,}585$$

$$b_2 = \beta_2 . \frac{\sigma_y}{\sigma_{x1}} = 0{,}355. \frac{2{,}28}{3{,}38} = 0{,}24$$

أما قيمة المعامل الحر(a) فيستخرج كالتالي :

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 = 5 - 0{,}585 . 14 - 0{,}24 . 7 = -4{,}87$$

وهو ما يتفق تماما مع نتائج التقديرات المحصل عليها سابقا، أي :

$$\hat{y}_i = -4{,}87 + 0{,}585x_1 + 0{,}24x_2$$

مثـــال 5 :

الجدول التالي يعطي بيانات خاصة ببعض مؤشرات الوضعية الاجتماعية لإحدى الدول كالتالي:

	دخل الفرد اليومي المتوسط($) ($y_i$)	الأجر اليومي المتوسط للفرد العامل (x_1) ($)	العمر المتوسط للفرد العاطل عن العمل (x_2) (سنة)
القيمة المتوسطة	86,8	54,9	33,5
تباين القيم	11,44	5,86	0,58
معامل الارتباط الزوجي	———	$r_{yx1} = 0,8405$	$r_{yx2}= - 0,2101$ $r_{x1x2}= - 0,116$

إذا افترضنا أن العلاقة بين المؤشرات المذكورة يعبر عنها نموذج الانحدار الخطي المتعدد التالي: $\hat{y}_i = - 73,52 + 1,62x_1 - 2,25x_2$

المطلـــوب:

أ- حساب معاملات الارتباط الجزئي و توضيح نتيجة مقارنتها بمعاملات الارتباط الزوجي المعطاة.

ب- حساب معامل الارتباط المتعدد ($R_{yx1,x2}$)، معامل التحديد المتعدد(R^2) وكذلك مقياس فيشر(F) ثم استعمالهم في تقييم جودة تمثيل نموذج الانحدار المعطى للعلاقة محل الدراسة.

الحـــل :

أ- حساب معاملات الارتباط الجزئي:

معامل الارتباط الجزئي للمتغير(x_1) الذي يقيس درجة تأثير(x_1) في(y) مع تثبيت قيمة المتغير(x_2)، يحسب من العلاقة التالية :

$$r_{yx1(\bar{x}_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \times r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_2}).(1-r^2_{x_1x_2})}}$$

$$= \frac{0,8405 - 0,2101 \times 0,116}{\sqrt{(1-0,2101^2).(1-0,116^2)}} = 0,8404$$

معامل الارتباط الجزئي للمتغير (x_2)يقيس درجة تأثير(x_2) على (y) مع تثبيت قيمة(x_1):

$$r_{yx2(\bar{x}_1)} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \times r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_1}).(1-r^2_{x_2x_1})}} =$$

$$= \frac{-0,2101 + 0,8405 \times 0,116}{\sqrt{(1-0,8405^2).(1-0,116^2)}} - 0,2092$$

حساب معامل الارتباط الجزئي للمتغير x1 ، الذي يعكس درجة تأثير هذا المتغير على المتغير x2 مع تثبيت قيم المتغير الناتج (y) :

$$r_{x1x2(\bar{y})} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{x_1y} \times r_{x_2y}}{(1-r^2_{x_1y}).(1-r^2_{yx_2})}$$

$$= \frac{-0,116 + 0,84 \times 0,2101}{\sqrt{(1-0,8405^2).(1-0,2101^2)}} = 0,1144$$

عند مقارنة معاملات الارتباط الجزئي بمعاملات الارتباط الزوجي فإننا نستنتج أنه نتيجة لضعف الارتباط الزوجي بين المؤشرات المستقلة $(r_{x1x2} = -0,116)$ فإن معاملات الارتباط الزوجي والجزئي لا تختلف كثيرا عن بعضها البعض.

الاستنتاجات التي يمكن تسجيلها عن نوع ومتانة العلاقة الارتباطية بين المؤشرات، المقاسة بواسطة معاملات الارتباط الزوجي والجزئي، كلها متقاربة.

$$\begin{cases} r_{yx1}(\bar{x}_2) = 0{,}8404 \\ r_{yx1} = 0{,}8405 \end{cases} ; \quad \begin{cases} r_{yx2}(\bar{x}_1) = -0{,}2092 \\ r_{yx2} = -0{,}211 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} r_{x1x2}(\bar{y}) = 0{,}1144 \\ r_{x1x2} = 0{,}116 \end{cases}$$

ب- تقييم نموذج الانحدار المعطى:

* معامل الارتباط المتعدد $(R_{yx1,x2})$: $R_{yx1,x2} = \sqrt{1 - \frac{A}{B}}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & r_{y.x_1} & r_{y.x_2} \\ r_{x_1.y} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2.y} & r_{x_1.x_2} & 1 \end{vmatrix} ; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1.x_2} \\ r_{x_1.x_2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = 1+2(0{,}8405).(-0{,}2101).(-0{,}116) -$$
$$- (0{,}8404^2 + 0{,}2101^2 + 0{,}116^2) = 0{,}277$$
$$B = 1 - r^2_{x1x2} = 1 - 0{,}116^2 = 0{,}9865$$
$$R_{yx,1x2} = \sqrt{1 - \frac{0{,}277}{0{,}9865}} = 0{,}848$$

بناءا على قيمة $R_{yx1,x2}$ نعتبر أن علاقة(y) بـــx2 ,x1 قوية.

*حساب معامل التحديد R^2 : $R^2 = (R^2_{yx1,x2}) = 0{,}72$

قيمة معامل التحديد تدل على أن 72% فقط من التغييرات في متوسط الدخل اليومي للفرد(y) تتسبب فيها المؤشرات التي أخذت بعين الاعتبار في النموذج :متوسط الأجر اليومي (x_1) ومتوسط عمر الفرد العاطل عن العمل (x_2)، أما 28% من التغيرات في(y) فتتسبب فيها عوامل أخرى لم تدخل في النموذج، مما يفسر الانخفاض النسبي لقيمة معامل التحديد. ربما يرجع سبب هذا الانخفاض النسبي في معامل

التحديد أيضا إلى الأخطاء في الحصول على المعطيات أو إلى صغر حجم العينة الإحصائية المستعملة في هذه الدراسة.

*حساب مقياس فيشر(F) يسمح باختبار فرضية H_0 حول المعنوية الإحصائية لمعادلة الانحدار المقترحة و معامل التحديد المحصل عليه.

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,72^2}{1-0,72^2} \cdot \frac{27}{2} = 14,53$$

$$F_{tab} = F_{0,05}(2,27) = 3,35$$

بمقارنة (F_{tab})بـ(F_{reel}) نستنتج أنه يجب رفض الفرضية (H_0) لأن ($F_{reel} > F_{tab}$). إذن نستنتج أنه باحتمال0,95 = ($1-\alpha$) معادلة الانحدار المقترحة هي معنوية إحصائيا وأن قيمة معامل التحديد المحصل عليها موضوعية. بالإضافة إلى ذلك هذين المقياسين الإحصائيين تكونا نتيجة التأثير الموضوعي لـــ (x_1,x_2) على (y) .

مثـــال 6 :

البيانات التالية خاصة ببعض المؤشرات التي تعكس ظروف العمل، مأخوذة من 20 مقاطعة في دولة ما:

	دخل الفرد السنوي المتوسط ($)(y)	نسبة العاملين في ظروف صعبة من مجموع العاملين (x_1) (%)	نسبة السكان النشطين من مجموع السكان (x_1) (%)
متوسط القيم	112,72	5,4	50,88
σتباين القيم	31,58	3,34	1,74
خصائص الارتباط بين المؤشرات	$R_{yx1,x2}$ = 0,773	r_{yx1}= 0,746	r_{yx2} = 0,507 ; r_{x1x2}= 0,432

إذا افترضنا أن معادلة الانحدار الممثلة للعلاقة بين المؤشرات السابقة هي:

$$\hat{y}_i = - 130,49 + 6,14x_1 + 4,13x_2$$

المطلوب:

أ - التأكد من فرضية (H_0)حول المعنوية الإحصائية لمعادلة الانحدار المعطاة وكذلك موضوعية معامل التحديد(R^2) .

ب - تقييم المعنوية الإحصائية لمعاملات معادلة الانحدار المعطاة باستخدام مقياس ستيودنت (t).

الحـــل:

أ - تقييم المعنوية الإحصائية لمعادلة الانحدار المعطاة:

يتم تقييم المعنوية الإحصائية لهذه المعادلة باستخدام مقياس فيشر (F).

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0,773^2}{1-0,773^2} \cdot \frac{20-2-1}{2} =$$

$$F_{reel} = 1,4846 \ . \ 8,5 = 12,62$$

$$F_{tab} = F_{0,05}(2 \ , \ 17) = 3,59$$

بمقارنة (F_{tab}) و (F_{reel}) نستنتج أنه يجب رفض فرضية(H_0) و التأكيد على أن معادلة الانحدار المعطاة معنوية إحصائيا وأن قيمة معامل التحديد المحصل عليها $(R^2= R^2_{yx1,x2} = 0,60)$ هي موضوعية، ذلك لأنهما يتمتعان بمصداقية إحصائية مقبولة و أنهما لم يتكونا تحت تأثير عوامل عشوائية. إن ضعف قيمة معامل التحديد $(R^2=0,60)$ بالرغم من موضوعيته تعني أن نموذج الانحدار المقترح يمثل العلاقة المدروسة تمثيلا صحيحا إلا أن هناك عوامل أخرى غير (x_2,x_1) تؤثر تأثيرا هاما على (y) لم تأخذ بعين الاعتبار، ذلك لأن (x_2,x_1) لا يؤثران على(y) إلا بـــ 60% فقط.

ب- تقييم المعنوية الإحصائية للمعاملات(b_i) لمعادلة الانحدار:

من أجل تقييم الأهمية الإحصائية لتكوين معاملات الانحدار(b_i)، نلجأ إلى حساب مقياس ستيودنت (t) لكل المعاملات(b_i) للمعادلة المقترحة:

$$t_{bi} = \frac{b_i}{SE_{bi}} \quad ; \quad S.E_{bi} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{1 - R^2_{yx_1, ..., x_n}}}{\sigma_x \cdot \sqrt{1 - R^2_{x_i, x_2, ..., x_n}}} \times \frac{1}{\sqrt{n - m - 1}}$$

حيث أن : $R^2_{yx1,x2} = 0,773^2 \; ; \; R^2_{x1x2} = 0,432^2$

$$S.E_{b1} = \frac{31,58.\sqrt{1 - 0,773^2}}{3,34.\sqrt{1 - 0,432^2}} \times \frac{1}{\sqrt{20 - 3 - 1}} = \frac{20}{3} \times \frac{1}{4,123} = 1,62$$

$$t_{b1} = \frac{b_1}{S.E_{b1}} = \frac{6,14}{1,62} = 3,79 \quad ;$$

$$S.E_{b2} = \frac{31,58.\sqrt{1 - 0,773^2}}{1,74.\sqrt{1 - 0,432^2}} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 3,09$$

$$t_{b2} = \frac{3,14}{3,09} = 1,33 \quad ;$$

مقارنة قيم(t) المحسوبة والجدولية:

$$t_{b1}(reel) = 3,79 \; ; \; t_{b1}(tab) = t_{b1(0,05)}(v2 = 17) = 2,11$$

ما دام أن : $t_{b1}(reel) > t_{b1}(tab) \quad : \quad 3,79 > 2,11$

إذن معامل معادلة الانحدار (b_1) يتمتع بمعنوية إحصائية وهو ذو مصداقية وفعالية عالية ونستطيع الاعتماد عليه في التحليل وإجراء التقديرات.

بينما: $t_{b2}(reel) = 1,33 \; ; \; t_{b2}(tab) = 2,11$

إذن: $t_{b2}(reel) < t_{b2}(tab) \quad : \quad 1,33 < 2,11$

وهذا يعني أن قيمة(b_2) غير معنوية إحصائيا وغير موضوعية ولا تتمتع بالمصداقية والجودة وذلك لأنها تكونت تحت تأثير عوامل عشوائية. بعبارة أخرى هذه النتائج تؤكد تأثير(x_1) القوي على (y) و التأثير الضعيف لـــ(x_2) على(y) .

مثال 7 :

علاقة الطلب على اللحوم الحمراء(y) بثمنها (x_1) و ثمن اللحوم البيضاء (x_2) ممثلة بمعادلة الانحدار التالية:

$$\log \hat{y} = 0{,}1274 - 0{,}2143.\log x_1 + 2{,}8254 \log x_2$$

المطلوب:

أ- وضع المعادلة السابقة في شكلها الطبيعي (بدون استعمال اللوغاريتم).

ب-تقييم الأهمية الإحصائية لمعاملات المعادلة الانحدارية السابقة من خلال مقياس ستيودنت(t)، إذا علمت أن: $t_{b1}(_{reel}) = 0{,}827$; $t_{b2}(_{reel}) = 1{,}015$ و أن عدد درجات الحرية $V_2 = 15$.

الحـــل:

أ- إعادة كتابة المعادلة السابقة في شكلها الطبيعي (بدون اللوغاريتم):

$$\hat{y} = 10^{0,1274} . x_1^{-0,2143} . x_2^{2,8254}$$

أو:

$$\hat{y} = 10^{0,174} . \frac{1}{x_1^{0,2143}} . x_2^{2,8254}$$

إن قيم المعاملات(b_2,b_1) في هذه الدالة الانحدارية الأسية هي عبارة عن معاملات المرونة، أي مرونة الطلب (y) بالنسبة للأثمان x_2 , x_1 :

$$\bar{E}_{yx1} = - 0{,}2143\% \ ; \ \bar{E}_{yx2} = 2{,}8254\%$$

لذلك فارتباط الطلب على اللحوم الحمراء(y) بثمن اللحوم البيضاء(x_2) أقوى : فهو يزداد بـــ2,83% عند زيادة الثمن

X_2بـــ1%. أما ارتباط الطلب على اللحوم الحمراء(y) بثمنه(x_1) فهو عكسي و لكنه أضعف، حيث أنه يتناقص بـــ0,21% عندما يزداد ثمنه بـــ1% .

ب- تحديد القيمة الإحصائية لمعاملات معادلة الانحدار المعطاة:

لدينا: $t_{b1}\ (_{reel}) = 0,827 \quad ; \quad t_{b2}(_{reel}) = 1,015$

و من الجدول الإحصائي نستخرج قيمة (t_{bi}) الجدولية.

$$t_{bi}\,(_{0,05})\ (\ v_2 = 15) = 2,1315$$

بالمقارنة نلاحظ أن: $t_{bi(tab)} > t_{bi(reel)}$. إن هذا يدل على الطبيعة العشوائية للعلاقة بين المؤشرات(y, x_1, x_2)، كما يدل على ضعف المصداقية الإحصائية للمعادلة الانحدارية السابقة. لذلك ينصح بعدم استعمال هذه المعادلة الانحدارية في إجراء الاستطلاع والقيام بالتقدير الإحصائي.

مثـــال 8 :

بالاعتماد على معطيات الجدول التالي، يريد هولدينغ الصناعات الإلكترونية، المتكون من 20 شركة، دراسة علاقة إنتاجية العامل(y) بالتجهيزات الإنتاجية الجديدة المضافة(x_1) (معبر عنها كنسبة مئوية من قيمة رأس المال الثابت في آخر السنة) ونسبة العمال المؤهلين(x_2) (% من مجموع عدد العمال). إذا افترضنا أن نموذج الانحدار المعبر عن هذه العلاقة هو متعدد خطي.

رقم الشركة	y_i	x_1	x_2	رقم الشركة	y_i	x_1	x_2
1	7	3,9	10	11	9	6	21
2	7	3,9	14	12	11	6,4	22
3	7	3,7	15	13	9	6,8	22
4	7	4	16	14	11	7,2	25
5	7	3,8	17	15	12	8	28
6	7	4,8	19	16	12	8,2	29
7	8	5,4	19	17	12	8,1	30
8	8	4,4	20	18	12	8,5	32
9	8	5,3	20	19	14	9,6	32
10	10	6,8	20	20	14	9	36

المطلوب:

1- تقدير معادلة الانحدار المطلوبة و تقييم الأهمية الإحصائية لمعاملاتها.

2- تحليل ومقارنة معاملات الارتباط الزوجي و الجزئي.

3- تقييم معادلة الانحدار المقدرة باستعمال معامل التحديد المتعدد ومقياس فيشر(F) .

4 - تقييم الأهمية النسبية لتأثير المؤشرات المستقلة على المؤشر التابع(y) باستعمال معاملات المرونة الجزئية المتوسطة ($\bar{E}$).

الحـــل:

1- تقدير معادلة الانحدار:

إذا كان نموذج الانحدار المقترح لتمثيل العلاقة المدروسة هو من الشكل : $y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$ فنحسب معاملاته (b_2 ,b_1 , a) باستخدام المحددات Δ, Δ_a, Δ_{b1}, Δ_{b2} .

نقوم أولا بتحضير الجدول الذي يسمح بحساب هذه القيم:

i	y	x_1	x_2	$y.x_1$	$y.x_2$	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
1	7	3,9	10	27,3	70	39	15,21	100
2	7	3,9	14	27,3	98	54,6	15,21	196
3	7	3,7	15	25,9	105	55,5	13,7	225
4	7	4	16	28	112	64	16	256
5	7	3,8	17	26,6	119	64,6	14,4	289
6	7	4,8	19	33,6	133	91,2	23	361
7	8	5,4	19	43,2	152	102,6	29,2	361
8	8	4,4	20	35,2	160	88	19,4	400
9	8	5,3	20	42,4	160	106	28,1	400
10	10	6,8	20	68	200	136	46,2	400
11	9	6	21	54	189	126	36	441
12	11	6,4	22	70,4	242	140,8	41	484
13	9	6,8	22	61,2	198	149,6	46,2	484
14	11	7,2	25	79,2	275	180	51,9	625
15	12	8	28	96	336	224	64	784
16	12	8,2	29	98,4	348	237,8	67,2	841
17	12	8,1	30	97,2	360	243	65,6	900
18	12	8,5	31	102	372	263,5	72,3	961
19	14	9,6	32	134,4	448	307,2	92,2	1024
20	14	9	36	126	504	324	81	1296
Σ	192	123,8	446	1276,3	4581	2997,4	837,7	10828
ق.م	9,6	6,19	22,3	63,8	229	149,87	41,89	541,4
σ	2,4	1,89	6,7					
σ^2	5,74	3,57	44,89					

$$\Delta \begin{vmatrix} 20 & 123,8 & 446 \\ 123,8 & 837,7 & 2997,4 \\ 446 & 2997,4 & 10828 \end{vmatrix} ; \Delta_a = \begin{vmatrix} 192 & 123,8 & 446 \\ 1276,3 & 837,7 & 2997,4 \\ 4581 & 2997,4 & 10828 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\Delta_{b1} = \begin{vmatrix} 20 & 192 & 446 \\ 123,8 & 1276,3 & 2997,4 \\ 446 & 4581 & 10828 \end{vmatrix} ; \Delta_{b2} = \begin{vmatrix} 20 & 123,8 & 192 \\ 123,8 & 837,7 & 1276,3 \\ 446 & 2997,4 & 4581 \end{vmatrix}$$

$\mathbf{\Delta = 139234,32 \ ; \ \Delta_a = 255399 \ ; \ \Delta_{b1} = 132376 \ ; \ \Delta_{b2} = 11741,84}$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = 1,8343; \ b_1 = \frac{\Delta_{b1}}{\Delta} = 0,95; \ b_2 = \frac{\Delta_{b2}}{\Delta} = 0,084$$

معادلة الانحدار المطلوبة هي: $\hat{y}_i = 1,8343 + 0,95x_1 + 0,08x_2$

2- تقييم نموذج الانحدار المقدر :

- حساب معاملات الارتباط الزوجية :

$$r_{yx1} = \frac{\overline{y_i \times x_1} - \overline{x_1} \times \overline{y}}{\sigma_{x_1} \times \sigma_y} = \frac{63,8 - 6,19 \times 9,6}{2,4 \times 1,89} = 0,9647$$

$$r_{yx2} = \frac{\overline{y_i \times x_2} - \overline{y} \times \overline{x}}{\sigma_{x_2} \times \sigma_y} = \frac{229 - 22,3 \times 9,6}{6,7 \times 2,4} = 0,9279$$

$$r_{x1x2} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}{\sigma_{x_1} \times \sigma_{x_2}} = \frac{149,87 - 6,19 \times 22,3}{1,89 \times 6,7} = 0,934$$

- حساب معامل الارتباط المتعدد $(R_{yx1,x2})$: $R_{yx1,x2} = \sqrt{1 - \frac{A}{B}}$

$$A = 1+2.r_{yx1} \ . \ r_{yx2} \ . \ r_{x1x2} - \ (r^2_{yx1} + r^2_{yx2} + r^2_{x1x2})$$

$$A = 1+2(0,9647) . (0,9279) . (0,934) -$$
$$- (0,9647^2 + 0,9279^2 + 0,934^2)$$
$$A = 0,008131$$
$$B = 1 - r^2_{x1x2} = 1 - 0,934^2 = 0,1276$$
$$R_{yx1,x2} = 1 - \frac{0,008131}{0,1276} = 0,97$$

هذه القيمة لمعامل الارتباط المتعدد تشير إلى وجود علاقة ارتباطية قوية جدا بين إنتاجية العامل(y) والتقنيات الإنتاجية الجديدة (x_1) وكفاءة العامل وخبرته (x_2) .

– حساب معاملات الارتباط الجزئي:

معامل الارتباط الجزئي لـــ x_1:

$$r_{yx1(\bar{x}_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \times r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_2}).(1-r^2_{x_1x_2})}} = \frac{0{,}9647 - 0{,}9279 \times 0{,}934}{\sqrt{(1-0{,}9279^2).(1-0{,}934^2)}}$$

$$r_{yx1(\bar{x}_2)} = 0{,}7357$$

معامل الارتباط الجزئي لـــ x_2:

$$r_{yx2(\bar{x}_1)} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \times r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_1}).(1-r^2_{x_1x_2})}} = \frac{0{,}9279 - 0{,}9647 \times 0{,}934}{\sqrt{(1-0{,}9647^2).(1-0{,}934^2)}}$$

$$r_{yx2(\bar{x}_1)} = 0{,}2855$$

معامل الارتباط الجزئي لـــ x_2معx_1 :

$$r_{x1x2(\bar{y})} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{x_1y} \times r_{x_2y}}{\sqrt{(1-r^2_{x_1y}).(1-r^2_{x_2y})}} = \frac{0{,}934 - 0{,}9647 \times 0{,}9279}{\sqrt{(1-0{,}9647^2).(1-0{,}9279^2)}}$$

$$r_{x1x2(\bar{y})} = 0{,}3957$$

إن قيم معاملات الارتباط الزوجي تدل على وجود علاقة ارتباطية قوية بين إنتاجية العمل(y) وكل من قيمة التقنيات الإنتاجية الجديدة المستعملة في الإنتاج(x_1) [r_{yx1}= 0,9647]واليد العاملة المؤهلة(x_2) [r_{yx2}= 0,9279] . لكن وفي نفس الوقت نلاحظ أن العلاقة الارتباطية بين المؤشرين(x_2,x_1) قوية جدا(r_{x1x2} = 0,934) وتفوق درجة الارتباط

بين (x_2) مع(y) . لذلك فإنه من أجل تحسين أداء النموذج الانحداري المقترح يمكن أن نستثني أو نلغي منه المؤشر(x_2) ، على أساس أن مصداقيته الإحصائية غير عالية. ذلك لأن ارتفاع قيمة معامل ارتباط(x_2) مع(y) هي ناتجة عن ارتفاع قيمة معامل ارتباط (x_2) ب (x_1)فقط. معاملات الارتباط الجزئي تعطي تقييما أكثر دقة لدرجة ارتباط المؤشرات مع بعضها من معاملات الارتباط الزوجي وذلك لأنها "تصفي" العلاقة بين كل مؤشرين من علاقتهما بالمؤشرات الأخرى التي يتكون منها النموذج . أكثر المؤشرات المستقلة ارتباطا بـــ (y) هو (x_1)، حيث أن$(r_{yx1(\bar{x}_2)}=0,7357)$. بينما علاقة$(y)$ بـــ (x_2) هي أضعف بكثير $(r_{yx2(\bar{x}_1)} = 0,2855)$. هنا أيضا نلاحظ أن الارتباط الجزئي لـــ(x_2) بـــ(y) أضعف من ارتباطه بـــx_1 مع تثبيت y،

أي: $r_{yx2(\bar{x}_1)}= 0,2855 < r_{x1x2(\bar{y})} = 0,3957$

هذا يدل على أن تأثير المؤشر(x_2) على y بمعزل عن المؤشر(x_1) يعتبر ضعيفا جدا وهذا ما يعتبر أمرا طبيعيا إذا ما لاحظنا أن قيمة $(r_{x1x2}= 0,934)$ تشير إلى أن هناك ارتباطا قويا بين(x_2,x_1) .

لهذا السبب فإنه عندما يكون هناك ارتباط قوي بين المؤشرات المستقلة ينصح باستثناء أو التخلص من المؤشر المستقل الذي يكون معامل ارتباطه مع المؤشرات المستقلة أقوى من معامل ارتباطه مع المؤشر التابع. في حالة هذا التمرين يجب استثناء المؤشر(x_2) من النموذج الانحداري.

-حساب معامل التحديد المتعدد (R^2):

$$R^2 = R^2_{yx1,x2} = (0{,}97)^2 = 0{,}94$$

قيمة معامل التحديد تظهر أن معادلة الانحدار المقترحة تمثل العلاقة المدروسة تمثيلا جيدا و هي ذات معنوية إحصائية كبيرة و تشير كذلك إلى أن94% من التغيرات في(y) تتسبب فيها (x_2,x_1).

-حساب مقياس فيشر (F) :

من أجل قياس فعالية معادلة الانحدار المقترحة وجودة تمثيلها و كذلك موضوعية معامل التحديد في التعبير عن ذلك نستعمل مقياس فيشر (F).

$$F_{reel} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}94}{1-0{,}94} \times \frac{17}{2} = 133{,}17$$

$$F_{tab} = F_{0,05}\,(2\,,\,17) = 3{,}59$$

نلاحظ أن ($F_{reel} > F_{tab}$) و هذا ما يؤكد موضوعية معامل التحديد المتعدد في قياس جودة تمثيل معادلة الانحدار المقدرة للعلاقة بين إنتاجية العمل(y)، التقنيات الجديدة(x_1) و مستوى تأهيل العمال(x_2).

- تقييم المعنوية الإحصائية لمعاملات معادلة الانحدار المقدرة:

من أجل تقييم المعنوية الإحصائية لمعاملات المعادلة المقترحة، نحسب مقياس ستيودنت(t) لكل المعاملات (b_i) ونقارنه بقيم(t) المستخرجة من الجدول.

$$t_{b1} = \frac{b_1}{S.E_{b_1}} \quad ; \quad SE_{b1} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{1-R^2_{yx_1,x_2}}}{\sigma_{x_1} \cdot \sqrt{1-R^2_{x_1x_2}}} \times \frac{1}{\sqrt{n-m-1}}$$

$$SE_{b1} = \frac{2{,}4 \cdot \sqrt{1-0{,}94}}{1{,}89 \cdot \sqrt{1-0{,}87}} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = 0{,}21 \;;$$

$$t_{b1} = \frac{b_1}{SE_{b_1}} = \frac{0,95}{0,21} = 4,52$$

$$t_{b2} = \frac{b_2}{SE_{b2}} \;;\; SE_{b2} = \frac{2,4.\sqrt{1-0,94}}{6,7.\sqrt{1-0,87}} \times \frac{1}{4,123} = 0,059$$

$$t_{b2} = \frac{0,08}{0,059} = 1,36$$

مقارنة قيم(t) الجدولية و المحسوبة:

$$t_{b1}(_{reel}) = 4,52 \;;\; t_{b1}(_{tab}) = t_{b1(0,05)}\,(\,v_2 = 17\,) = 2,11$$
$$t_{b1}(_{reel}) > t_{b1}(_{tab}) \quad : \; 4,52 > 2,11$$
$$t_{b2}(_{reel}) = 1,36 \;;\; t_{b2}(_{tab}) = t_{b2(0,05)}\,(\,v_2 = 17) = 2,11$$
$$t_{b2}(_{reel}) < t_{b2}(_{tab}) \quad : \; 1,36 < 2,11$$

هذه النتائج توضح أن (b_2) هي قيمة موضوعية و لها مصداقية إحصائية حيث أنها تكونت تحت تأثير عوامل غير عشوائية. وبالعكس قيمة (b_2) هي غير معنوية إحصائيا و تكونت تحت تأثير عوامل عشوائية، وبالتالي فإن المؤشر (x_2)، الذي معامله(b_2)، يمكن استثناءه من النموذج على أساس أنه لا يتمتع بالمصداقية الإحصائية و أن تأثيره على(y) ضعيف.

4- استخدام معاملات المرونة الجزئية في تقييم الأهمية النسبية لتأثير المؤشرات(x_i) على (y_i) :

معاملات المرونة الجزئية المتوسطة ($\bar{E}_{yxi}$) توضح النسبة المئوية لانحراف(y) عن قيمته المتوسطة($\bar{y}$) نتيجة لتغير أو انحراف المؤشر(x_i) بـــ1% عن قيمته المتوسطة($\bar{x}_i$) مع تثبيت قيم المؤشرات المستقلة الأخرى الداخلة في نموذج الانحدار عند مستوى معين.

$$\bar{E}_{yxi} = b_i \;. \frac{\overline{x_i}}{\overline{y}}$$

$$\bar{E}_{yx1} = b_1 . \frac{\overline{x_1}}{\overline{y}} = 0,95 \;. \frac{6,19}{9,6} = 0,6\%$$

$$\bar{E}_{yx2} = b_2 \;. \frac{\overline{x_2}}{\overline{y}} = 0,08 \times \frac{22,3}{9,6} = 0,1989\%$$

حسب قيم معاملات المرونة الجزئية يمكن استنتاج أن المؤشر(x_1) له تأثير كبير على(y) بعكس المؤشر (x_2) الذي يمارس تأثير ضعيف عليه (0,6% مقابل 0,2) . هذا أيضا يؤكد نفس النتيجة التي توصلنا إليها سابقا والخاصة بأهمية تأثير المتغيرات(x_i) على(y).

II - 3- تمارين:

تمرين 1:

المعطيات التالية تتعلق بـــ 20 مؤسسة من قطاع الصناعات الخفيفة، وهي تعكس علاقة الناتج الخام (y)بعدد ساعات العمل (x_1) المستهلكة في الإنتاج في السنة، وقيمة رأس المال الثابت المستعمل في كل سنة(x_2)

$\hat{y}=35+0,06x_1+2,5x_2$	معادلة الانحدار الخاصة بنشاط المؤسسات
0,9	معامل الارتباط المتعدد $(R_{yx1,x2})$
3000	مجموع مربع تباين قيم الناتج الفعلية عن النظرية$\Sigma(y-\hat{y})^2$

المطلوب:

- حساب معامل التحديد المتعدد .
- إجراء تحليل التباين الكلي لمعادلة الانحدار من أجل اختبار فرضية (H_o) حول الطبيعة العشوائية لتكوين معادلة الانحدار ومعامل التحديد.
- إجراء تحليل للنتائج المحصل عليها.

تمـــرين 2 :

أجريت دراسة على مستوى 19 مؤسسة تمارس نشاطها في تجارة الجملة لمعرفة علاقة رقم الأعمال (y) بالمساحة التجارية المخصصة لعرض وتخزين البضائع (x_1) وكمية المخزون(x_2) . خلصت الدراسة إلى اقتراح دالة الانحدار التالية الخاصة بنشاط هذه المؤسسات:

$\hat{y}_i = 21 + 14x_1 + 20x_2 + 0,6x_2^2$. معامل التحديد المتعدد $R^2 = 0,95$. قيم الأخطاء المعيارية لمعاملات الدالة المذكورة هي:

$$S.E_{b1} = 5 \quad ; \quad S.E_{b2} = 12 \quad ; \quad S.E_{b3} = 0,2$$

المطلـــوب :

- تقييم معادلة الانحدار المقترحة من خلال مقياس فيشر(F) .
- تقييم معاملات الانحدار من خلال درجة تأثير كل متغير مستقل على(y) .

تمـــرين 3:

اقترحت دراسة لسوق السكن، أجريت على عينة متكونة من 46 عائلة، معادلة الانحدار المتعددة التالية لتمثيل نشاط هذا السوق:

$$\hat{y}_i = 2{,}11 - 6{,}2x_1 + 0{,}95x_2 + 3{,}57x_3$$

حيث أن :

y : ثمن السكن.

x_1 : المسافة بين السكن ووسط المدينة.

x_2 : مساحة السكن.

x_3 :عدد الطوابق في العمارة.

معامل التحديد المتعدد $0{,}7=R^2$. قيم الأخطاء المعيارية$(S.E_{bi})$ لمعاملات المعادلة الانحدارية هي:

$S.E_{b1}= 1{,}8$; $S.E_{b2} = 0{,}54$; $S.E_{b3} = 0{,}83$

المطلوب:

- إجراء اختبار (H_o)حول الطبيعة العشوائية لتكوين معادلة الانحدار المقترحة ومعامل التحديد.
- تقييم معاملات معادلة الانحدار.

تمـــرين 4 :

البيانات المجمعة من 20 شركة في قطاع النسيج حول علاقة كمية الإنتاج(y) بعدد العمال(x_1) وقيمة رأس المال الثابت المستعمل(x_2) أعطت النتائج المتضمنة في الجدول التالي :

معامل التحديد المتعدد(R^2)	0,81
معامل الارتباط المتعدد(R)	....
معادلة الانحدار	$Ln\ \hat{y} = \ldots + 0{,}48Lnx_1 + 0{,}62Ln\ x_2$
($S.E_{bi}$)الأخطاء المعيارية لمعاملات الانحدار	$m_a = 2$; $m_{b1} = 0{,}06$; $m_{b2} =$.....
(b_i) مقياس (t) لستيودنت للمعاملات	$t_a = 1{,}5$; $t_{b1} =$ .... ; $t_{b2} = 5$

المطلـــوب:

1- اكتب معادلة الانحدار في شكلها الطبيعي (بدون استعمال اللوغاريتم)

2- ضع القيم المواتية مكان النقط (املأ الحيز الفارغ).

3- اختبر فرضية H_0 حول الأهمية الإحصائية لمعادلة الانحدار ولمعاملات هذه المعادلة ثم علق على نتائج هذا الاختبار.

تمريـــن 5:

أجب على نفس أسئلة التمرين السابق ولكن حسب المعطيات التالية:

معامل التحديد المتعدد(R^2)	....
معامل الارتباط المتعدد R	0,85
معادلة الانحدار	$\hat{y} =$ ..... $+ 0{,}48x_1 + 20x_2$
الأخطاء المعيارية لمعاملات الانحدار	$S.E_a = 2$; $S.E_{b1} = 0{,}06$; $S.E_{b2} =$ ......
(b_i)مقياس(t)لمعاملات الانحدار	$t_a = 1{,}5$; $t_{b1} =$......, $t_{b2} = 4$

تمريـــن 6 :

بعد تحليل نشاط عدد من المؤسسات المنتمية إلى أحد القطاعات الصناعية في الفترة 1990 -1997 تم اقتراح دالة الإنتاج التالية:

$$\log p = 0,552 + 0,276 \log z + 0,521 \log k$$

حيث أن:

P: الرقم القياسي للإنتاج الصناعي.

Z : عدد العاملين.

K : قيمة رأس المال الثابت.

إذا علمت أن :

$$R^2_{pk} = 0,9836\ ;\ R^2_{pz} = 0,7826\ ;\ R^2 = 0,9843$$

قيم الأخطاء المعيارية لمعاملات الانحدار $S.E_{bi}$ هي:

$S.E_k = 0,065\ ;\ S.E_z = 0,584$.

المطلوب :

1 - اكتب معادلة الانحدار في شكلها الطبيعي (بدون اللوغاريتم)

2 - أعط تفسيرا لمعاملات معادلة الانحدار في شكلها الطبيعي .

3- أجر اختبار H_0 حول المعنوية الإحصائية لمعاملات معادلة الانحدار باستعمال مقياس(t) لستيودنت. أي المتغيرات المستقلة(Z, K) غير ضرورية لتكوين النموذج.

4- أجر اختبار H_0 حول المعنوية الإحصائية لمعادلة الانحدار ككل ومعامل التحديد المتعدد أيضا و ذلك باستعمال مقياس فيشر (F).

5 – احسب معاملات الارتباط الجزئي للمتغيرات المستقلة (K,Z) وأجر تحليلا لطبيعة العلاقة الارتباطية لهذين المتغيرين بـــ P.

تمريـــن 7 :

بعد دراسة وتحليل عينة إحصائية من 30 مشاهدة، تم الحصول على النتائج التالية:

معادلة الانحدار	$\hat{y} = a + 0{,}176x_1 + 0{,}014x_2 - 7{,}75x_3$
معامل التحديد المتعدد(R^2)	0,65
$\bar{y}$	200
$\bar{x}_1$	150
$\bar{x}_2$	20
$\bar{x}_3$	100

المطلـــوب:

1- إيجاد معامل الارتباط المتعدد .

2- تقييم معادلة الانحدار ومعامل التحديد باستخدام مقياس فيشر (F)

3- حساب متوسط معامل المرونة لكل المتغيرات المستقلة.

4- استخرج قيمة المعامل (a).

تمريـــن 8 :

لقد خلصت دراسة تحليلية لبيانات إحصائية خاصة بنشاط 30 مؤسسة تابعة لقطاع الصناعات الثقيلة، إلى تحديد علاقة الربح (y) بإنتاجية العمل (x_1) والرقم القياسي لأسعار السلع المنتجة(x_2) بواسطة معادلة الانحدار الخطية المتعددة التالية : $y_i = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$

الجدول التالي يعطي نتائج معالجة البيانات الإحصائية الأولية:

المؤشر	القيمة المتوسطة	قيمة التباينσ	معامل الارتباط الزوجي
y	250	38	$r_{yx1} = 0{,}68$
x_1	47	12	$r_{yx2} = 0{,}63$
x_2	112	21	$r_{x1x2} = 0{,}42$

المطلوب:

1-كون معادلة الانحدار المتعددة المطلوبة في شكلها المعياري والطبيعي.

2- قيم معادلة الانحدار المحصل عليها في شكلها الطبيعي، وذلك باستعمال معامل الارتباط المتعدد، معامل التحديد و مقياس فيشر(F).

تمريـــن 9:

باستخدام معطيات نشاط 30 مصنع، متخصص في إنتاج منتج ما A، تم دراسة العلاقة بين كمية الطاقة الكهربائية المستهلكة(y) و الكمية المنتجة(x_1) من المنتج A وكذلك مستوى مكننة الإنتاج(x_2).

البيانات المستعملة معطاة في الجدول التالي :

المؤشر	القيمة المتوسطة	تباين المؤشرات	معامل الارتباط الزوجي
y	1000	27	$r_{yx1}= 0{,}77$
x_1	420	45	$r_{yx2} =0{,}43$
x_2	41,5	18	$r_{x1x2}= 0{,}38$

إذا افترضنا أن معادلة الانحدار الممثلة للعلاقة السابقة هي من الشكل المتعدد الخطي.

المطلوب:

1 - قدر معادلة الانحدار المطلوبة في شكلها الطبيعي والمعياري.

2 - احسب معاملات الارتباط الجزئي و المتعدد.

3 - أجر تقييما للمعادلة الانحدارية المحصل عليها.

تمـــرين 10

أجب على نفس الأسئلة السابقة باستعمال المعطيات التالية:

معامل الارتباط الزوجي	تباين قيم المؤشرات	القيمة المتوسطة	المؤشر
$r_{yx1} = 0,52$	2	12	y
$r_{yx2} = 0,84$	0,5	4,3	x_1
$r_{x1x2} = 0,43$	1,8	10	x_2

تمـــرين 11:

انطلاقا من عينة إحصائية متكونة من 30 عائلة أجريت دراسة لتحديد العلاقة بين الكمية التي يستهلكها الفرد من اللحوم الحمراء(y) بدخل هذا الفرد(x_1) و الكمية المستهلكة من طرفه من الأسماك(x_2) .

نتائج هذه الدراسة معطاة في الجدول التالي:

معادلة الانحدار	$\hat{y} = -180 + 0,2x_1 - 0,4x_2$
الأخطاء المعيارية لمعاملات المعادلة الانحدارية	$S.E_a = 20,\ S.E_{b1} = 0,01\ ;\ S.E_{b2} = 0,25$
معامل الارتباط المتعدد	0,85

المطلـــوب:

1- أجر تقييما لمعاملات انحدار المعادلة السابقة باستخدام مقياس(t) لستيودنت.

2- أجر تقييما لمعادلة الانحدار ككل باستخدام مقياس فيشر (F).

تمـــرين 12:

الجدول التالي يعطي نتائج دراسة إحصائية لعلاقة إنتاجية العامل(y) بمستوى تأهيله(x_1) ومتوسط عمره(x_2) .

معادلة الانحدار	$\hat{y}= a+ 10x_1+ 2x_2$
الأخطاء المعيارية لمعاملات المعادلة	$S.E_a= 0,5$; $S.E_{b1}= 2$; $S.E_{b2}$ = ...
الانحدار مقياس ستيودنت (t)لمعاملات معادلة	$t_a = 3$, t_{b1}= ..... ; $t_{b2} = 5$
معامل الارتباط المتعدد	0,85

المطلـــوب:

1 - احسب قيمة المعامل الحر(a) واستكمل حساب القيم في مكان الفراغات.

2- أجر تقييما عاما لمعادلة الانحدار المعطاة.

تمريـــن 13:

تستعمل المعطيات الواردة في الجدول التالي لدراسة علاقة رقم الأعمال(y) لـــ 12 مؤسسة تجارية من نفس القطاع بقيمة رأس المال الثابت(x_1) و المتداول(x_2) الذي تستعمله هذه المؤسسات في نشاطها.

رقم المؤسسة	القيمة السنوية لرقم الأعمال (y)	القيمة السنوية المتوسطة لرأس المال الثابت (x1)	القيمة السنوية المتوسطة لرأس المال المتداول(x_2)
1	203	118	105
2	63	28	56
3	45	17	54
4	113	50	63
5	121	56	28
6	88	102	50
7	110	116	54
8	56	124	42
9	80	114	36
10	237	154	106
11	160	115	88
12	75	98	46

المطلوب:

1- إجراء تقدير لمعادلة الانحدار المتعددة الخطية الممثلة للعلاقة المدروسة ثم أعطي تفسيرا للمعنى الاقتصادي لمعاملات هذه المعادلة.

2- احسب معاملات معادلة الانحدار المعيارية المطابقة للمعادلة السابقة.

3- احسب معاملات الارتباط الزوجي، الجزئي و المتعدد.

4- وضح درجة تأثير المؤشرات المستقلة(x_i) على المؤشر الناتج(y) .

5 - أعط تقييما عاما لمعادلة الانحدار الممثلة للعلاقة المدروسة من خلال مقياس فيشر (F) .

تمريـــن 14:

البيانات الإحصائية الواردة في الجدول أدناه تتعلق بحصيلة نشاط 25 مؤسسة اقتصادية أمريكية في سنة 1996 .

المطلوب:

1- تقدير معادلة الانحدار الخطية المتعددة الممثلة للعلاقة بين المؤشرات المعطاة.

2- تقييم درجة تأثير المؤشرات المستقلة على المؤشر التابع (y)باستعمال المعاملات المتوسطة للمرونة$(\bar{E}_{yxi})$.

3- تقييم المعنوية الإحصائية لمعاملات معادلة الانحدار المحصل عليها باستعمال مقياس ستيودنت(t) .

4- تقييم معادلة الانحدار ككل ومعامل التحديد المتعدد باستخدام مقياس فيشر(F) .

5- إجراء تقييم لمعادلة الانحدار باستعمال متوسط خطأ التقريب ($\bar{A}$)

6 - استخراج معاملات الارتباط الجزئي ثم إجراء تحليل مقارن لقيم هذه المعاملات ومعاملات الارتباط الزوجي.

7 -حساب القيمة المتوقعة للدخل الصافي $(\hat{y}_p)$ عندما تزيد قيم المؤشرات المستقلة (x_i)بـــ 20% ثم بـــ30% عن قيمتها المتوسطة$(\bar{x}_i)$:

أي عندما تصبح($x_p=\bar{x}_i+0,2\bar{x}_i$) و ($x_p=\bar{x}_i+0,3\bar{x}_i$) .

رقم الشركة	الدخل الصافي (MD$) y	قيمة تداول رأس المال(MD$) x_1	قيمة رأس المال المستعمل (MD$) x_2	عدد العاملين (ألف عامل) x_3	القيمة الرأسمالية للشركة (MD$) x_4
1	0,9	31,3	18,9	43	40,9
2	1,7	13,4	13,7	64,7	40,5
3	0,7	4,5	18,5	24	38,9
4	1,7	10	4,8	50,2	38,5
5	2,6	20	21,8	106	37,3
6	1,3	15	5,8	96,6	26,5
7	4,1	137,1	99	347	37
8	1,6	17,9	20,1	85,6	36,8
9	6,9	165,4	60,6	745	36,3
10	0,4	2	1,4	4,1	35,3
11	1,3	6,8	8	26,8	35,3
12	1,9	27,1	18,9	42,7	35
13	1,9	13,4	13,2	61,8	26,2
14	1,4	9,8	12,6	212	33,1
15	0,4	19,5	12,2	105	32,7
16	0,8	6,8	3,2	33,5	32,1
17	1,8	27	13	142	30,5
18	0,9	12,4	6,9	96	29,8
19	1,1	17,7	15	140	25,4
20	1,9	12,7	11,9	59,3	29,3
21	0,9	21,4	1,6	131	29,2
22	1,3	13,5	8,6	70,7	29,2
23	2	13,4	11,5	65,4	29,1
24	0,6	4,2	1,9	23,1	27,9
25	0,7	15,5	5,8	80,8	27,2

تمريـــن 15:

أجب على نفس الأسئلة السابقة باعتبار البيانات الإحصائية الواردة في الجدول الإحصائي التالي الخاص بنشاط نفس الشركات في سنة 1995

رقم الشركة	الدخل الصافي yشض	قيمة تداول المال رأس x_1	قيمة رأس المال المستعمل x_2	عدد العاملين والموظفين x_3	رقم الشركة	الدخل الصافي y	قيمة تداول رأس المال x_1	قيمة رأس المال المستعم لx_2	عدد العاملين والموظفين x_3
1	6,6	6,9	83,6	222	11	4,2	71,9	32,5	225,4
2	3	18	6,5	32	12	2,7	93,6	25,4	675
3	6,5	107,9	50,4	82	13	1,6	10	6,4	43,8
4	3,3	16,7	15,4	45,2	14	2,4	31,5	12,5	102,3
5	0,1	79,6	29,6	299,3	15	3,3	36,7	14,3	105
6	3,6	16,2	13,3	41,6	16	1,8	13,8	6,5	49,1
7	1,5	5,9	5,9	17,8	17	2,4	64,8	22,7	50,4
8	5,5	53,1	27,1	151	18	1,6	30,4	15,8	480
9	2,4	18,8	11,2	82,3	19	1,4	12,1	9,3	71
10	3	35,3	16,4	103	20	0,9	31,3	18,9	43

تمـــرين 16: الجدول التالي يعرض معطيات إحصائية عن حالة سوق البناءات الجاهزة في إحدى الدول في سنة 1997:

رقم السكن	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	15,9	1	1	39	20	8,2	0	1	0
2	27	3	1	68,4	40,5	10,7	0	1	0
3	13,5	1	3	34,8	16	10,7	0	1	12
4	15,1	1	2	39	20	8,5	0	1	12
5	21,1	2	4	54,7	28	10,7	0	1	12
6	28,7	3	4	74,7	46,3	10,7	0	1	12
7	27,2	3	2	71,7	45,9	10,7	0	0	0
8	28,3	3	1	74,5	47,5	10,4	0	0	0
9	52,3	4	1	137,7	87,2	14,6	0	1	0
10	22	1	3	40	17,7	11	1	1	8
11	28	2	3	53	31,1	10	1	1	8
12	45	3	1	86	48,7	14	1	1	8
13	51	4	1	98	65,8	13	1	1	8
14	34,4	2	4	62,6	21,4	11	0	0	0
15	24,7	1	2	45,3	20,6	10,4	1	0	8
16	30,8	2	1	56,4	29,7	9,4	1	1	8
17	15,9	1	3	37	17,8	8,3	0	0	0
18	19	3	2	67,5	43,5	8,3	1	1	0
19	15,4	1	1	37	17,8	8,3	1	1	3
20	28,6	3	4	69	42,4	8,3	0	0	3

الرموز المستعملة:

y : ثمن السكن (ألف$) ؛ x_1 : عدد الغرف في السكن. ؛

x_2 : رقم الحي الذي يوجد فيه السكن ؛

(x_3) :المساحة الإجمالية للسكن (م^2)

x_4 : المساحة المستعملة في السكن (م^2) ؛ x_5 : مساحة المطبخ (م)^2

x_6 : نوع السكن (1–جدرانه بالآجر؛ 2– غيره)

x_7: وجود شرفة (1– نعم ؛ 0– لا)

x_8 : عدد الأشهر المتبقية على الانتهاء من السكن

المطلوب:

1- أوجد جدول معاملات الارتباط الزوجي للأزواج المختلفة للمؤشرات ثم حدد ما هي أزواج المؤشرات ذات الارتباط العالي والتي يمكن الاستغناء عنها.

2 -كون معادلتي الانحدار الخطية و الأسية، الممثلة للعلاقة بين ثمن السكن و كل المؤشرات المستقلة المؤثرة فيه. حدد درجة الازدواج الخطي بين المؤشرات المستقلة، ما هو النموذج الذي يتضح فيه الازدواج الخطي أكثر.

3 -كون نموذج الانحدار $\hat{y}_i = f(x_1, x_3, x_4, x_5, x_8)$ في الشكل الخطي وفي الشكل الأسي. ما هي المؤشرات المستقلة الأكثر تأثيرا على ثمن السكن.

تمرين 17 :

أجب على نفس الأسئلة السابقة باعتبار المعطيات الواردة في الجدول التالي لنفس سوق السكن ولكن لسنة 1998 :

رقم السكن	y	x_1	x_3	x_4	x_5	x_8	رقم السكن	y	x_1	x_3	x_4	x_5	x_8
1	15,6	1	40	20	8,3	0	13	35,6	2	71,1	36,2	13,3	6
2	27,7	3	69,1	41,3	8,3	0	14	34	3	68	41	8	1
3	34,1	2	68,1	35,4	13	20	15	19	1	38	19	7,4	12
4	37,7	2	75,3	41,4	12,1	20	16	46,6	2	93,2	49,5	14	12
5	41,9	3	83,7	48,5	12,1	20	17	5,5	3	117	55,2	25	12
6	24,4	1	48,7	22,3	12,4	20	18	24,2	1	42	21	10,2	8
7	21,3	1	39,9	18	8,1	0	19	25,7	2	62	35	11	5
8	36,7	2	68,6	35,5	17	12	20	51,2	3	89	52,3	11,5	4
9	21,5	1	39	20	9,2	0	21	75,9	4	132	89,6	11	10
10	26,4	2	48,6	31	8	0	22	21,2	1	40,8	19,2	10,1	6
11	53,9	3	98	56	22	0	23	30,8	2	59,2	31,9	11,2	0
12	34,2	2	68,5	30,7	8,3	6	24	34	3	65,4	38,9	9,3	7

تمـــرين 18 :

تستعمل المعطيات الإحصائية الواردة في الجدول التالي من أجل دراسة علاقة الرقم القياسي لمستوى المعيشة(y) بالمؤشرات التالية :

x_1 :الناتج المحلي الخام لسنة 1997 (% من سنة 1990)

x_2 : الإنفاق على الاستهلاك بالأسعار الجارية (% من الناتج المحلي الخام)

x_3 : إنفاق ربات البيوت (% من الناتج .م.خ)

x_4 : إجمالي الادخار (%من الناتج .م.خ)

x_5: مستوى التغطية الغذائية للسكان (حريرة / للفرد)

x_6 : أمل الحياة (عدد السنوات بالنسبة لسنة 1997)

x_5	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	y	الدولة
77	3343	25,5	56,1	75,5	115	0,904	النمسا
78,2	3001	21,8	61,8	78,5	123	0,922	استراليا
68	3101	25,7	59,1	7,4	74	0,763	روسيا البيضاء
77,2	3543	17,8	63,3	77,7	111	0,923	بلجيكا
77,2	3237	15,9	64,1	84,4	113	0,918	بريطانيا
77,2	3330	22,4	57	75,9	110	0,906	ألمانيا
75,7	3808	20,6	50,7	76	119	0,905	الدانمارك
62,6	2415	25,2	57,1	67,5	146	0,545	الهند
78	3295	20,7	62	78,2	113	0,894	إسبانيا
78,2	3504	17,5	61,8	78,1	108	0,9	إيطاليا
79	3056	19,7	58,6	78,6	113	0,932	كندا
67,6	3007	18,5	71,7	84	71	0,74	كزخستان
69,8	2844	42,4	48	59,2	210	0,701	الصين
78,1	3350	25,2	47,5	67,7	130	0,927	النرويج
72,5	3344	22,4	65,3	82,6	127	0,802	بولونيا
66,6	2704	22,7	53,2	74,4	61	0,747	روسيا
76,7	3642	18,1	67,9	83,3	117	0,927	و. م . أ
68,8	2753	20,1	61,7	83,7	46	0,721	أوكرانيا
6,8	2916	17,3	52,9	73,8	107	0,913	فنلندا
78,1	3551	16,8	59,9	79,2	110	0,918	فرنسا

المطلوب:

1- احسب معاملات الارتباط الزوجي بين المؤشرات، ثم احسب قيمة(χ^2) من أجل تحديد مستوى الازدواج الخطي.

- احسب قيم معاملات التحديد المتعدد بين المتغيرات مع اعتبار في كل مرة واحد من المتغيرات المستقلة على أنه المتغير التابع. بالاعتماد على هذه المعاملات حدد ما هي المؤشرات التي تتسبب في الازدواج الخطي.

2-كون نموذج الانحدار الخطي واحسب معاملاته.

3- أجر تقييما إحصائيا لمعادلة و معاملات الانحدار المقدرة باستعمال مقياس فيشر و مقياس ستيودنت.

تمرين 19 :

فيما يلي نورد الإحصائيات الخاصة بالبلدان التالية لسنة 1998.

المطلوب:

1- تقدير نموذج الانحدار المتعدد الخطي الممثل للعلاقة بين (y) والمؤشرات المستقلة.

2- تقييم نموذج الانحدار المقترح.

القيمة الغذائية اليومية/للفرد (حريرات) x_2	أمل الحياة (سنة) x_1	الرقم القياسي لمستوى المعيشة (y)	الدولة	القيمة الغذائية اليومية /الفرد حريرات x_2	أمل الحياة (سنة) x_1	الرقم القياسي لمستوى المعيشة (y)	الدولة
2414	62,8	0,546	الهند	3340	77,2	0,902	النمسا
3293	78	0,892	إسبانيا	3003	78,1	0,920	استراليا
3057	79,4	0,933	كندا	3136	72,9	0,827	الأرجنتين
2850	69,9	0,705	الصين	3102	67,7	0,760	روسيا البيضاء
3343	72,2	0,801	بولونيا	3544	77,4	0,925	بلجيكا
2703	66,4	0,746	روسيا	2938	66,8	0,739	البرازيل
2943	69,9	0,752	رومانيا	3236	77,4	0,922	بريطانيا
3644	76,7	0,928	و.م.أ	3402	70,9	0,795	هنغاريا
3568	69	0,728	تركيا	3332	77,1	0,907	ألمانيا
2933	64,1	0,695	ج.افريقيا	3575	78,1	0,867	اليونان
2905	80	0,924	اليابان	3289	66,3	0,616	مصر

تمــــرين 20:

تستعمل معطيات سنة 1995 الواردة في الجدول أدناه لدراسة العلاقة بين أمل الحياة(y) وعدة مؤشرات في عدة بلدان كما يلي:

الدولة	y	x_1	x_2	x_3	x_4
الموزمبيق	47	3	2,6	2,4	113
تشاد	48	2,6	2,5	2,5	117
النيبال	55	4,3	2,5	2,4	91
بنغلاديش	58	5,1	1,6	2,1	79
مالي	50	2	2,9	2,7	123
نيجيريا	53	4,5	2,9	2,8	80
الهند	62,1	5,2	1,8	2	68
أنغولا	47	4,9	3,1	2,8	124
باكستان	60	8,3	2,9	3,3	90
موريطانيا	51	5,7	2,5	2,7	96
الصين	69,2	10,8	1,1	1,1	34
مصر	63	14,2	2	2,7	56
المغرب	65	12,4	2	2,6	55
الجزائر	70	19,6	2,2	4,1	34
تونس	69	18,5	1,9	3	39
البيرو	66	14	2	3,1	47
تايلاند	69	28	0,9	1,3	35
تركيا	67	20,7	1,7	2,1	4
بولونيا	70	20	0,3	0,6	14
سلوفاكيا	72	13,4	0,3	0,7	11
كوريا ج.	72	42,4	0,9	1,9	10
كندا	7	78,3	1,3	1	6
هونغ كونغ	79	85,1	1,6	1,3	5
فرنسا	7	78	0,5	0,8	6
و . م . أ	77	100	1	1,1	8
اليابان	80	82	0,3	0,6	4

حيث أن:

y : متوسط أمل الحياة .

x_1 : الناتج المحلي الإجمالي حسب القدرة الشرائية للعملة المحلية .

x_2 : معدل نمو السكان بالمقارنة بالسنة الماضية(%).

x_3: معدل نمو القوة العاملة بالمقارنة بالسنة الماضية (%).

x_4 : معدل وفيات الأطفال(%).

المطلوب:

1- حساب معاملات الارتباط الزوجي. باستعمال هذه المعاملات حدد المؤشرات التي تتسبب في الازدواج الخطي.

2-كون نموذج الانحدار الخطي المتعدد الممثل للعلاقة المدروسة أعلاه.

3-إجراء تقييم لهذا النموذج المقدر وكذلك لمعاملاته المقدرة.

4- ما هي المؤشرات الأكثر تأثيرا على أمل الحياة في معادلة الانحدار المقترحة.

تمرين 21 :

لدينا البيانات الإحصائية التالية الخاصة بالسوق الثانوية لبيع السكنات الجاهزة في إحدى المدن الأوروبية سنة 2000.

رقم السكن	y	x_1	x_2	x_3	x_5	x_5
1	13	1	37	21,5	6,5	20
2	16,5	1	60	27	22,4	10
3	17	3	90	65	20	10
4	15	2	53	42	13	15
5	14,2	3	74	65	30	8
6	10,5	1	30,3	23	5,6	15
7	23	2	43	37	0	5
8	12	2	58	48	15	10
9	15,6	1	35	26	9	3
10	12,5	1	40	35	10	5
11	11,3	3	65	55	12	10
12	13	1	35	22	13	5
13	21	3	100	68	32	5
14	21	3	107	80	31	20
15	12	2	98	72	25	15
16	11	2	85	67	20	5
17	22,5	1	43	32	13	15
18	26	1	30	21	8	10
19	18,5	1	50	46	11	10
20	13,2	3	80	70	18	25
21	25,8	2	62	56	23	10
22	17	2	58	44	19	12
23	18	1	45	33	9	15
24	21	3	95	68	24	20
25	14,5	1	55	40	14	5

حيث أن :

y: ثمن السكن (ألف$)

x_1 : عدد الغرف في السكن.

x_2 : المساحة الكلية للسكن (م^2)

x_3 : المساحة المستعملة من السكن(م^2).

x_4 : مساحة المطبخ(م^2) .

x_5 : بعد السكن عن مترو الأنفاق (دقائق مشيا)

المطلوب:

1-كون جدول معاملات الارتباط الزوجي بين المؤشرات.

2-كون معادلة الانحدار الخطية التي تمثل العلاقة بين ثمن السكن(y) والمؤشرات الأخرى.

3- أحسب معامل التحديد المتعدد لكل مؤشر مستقل. استعمل قيم هذه المعاملات لتحديد المؤشرات التي تتسبب في الازدواج الخطي.

4- أجر تقييما إحصائيا شاملا لمعادلة الانحدار المحصل عليها محددا المؤشرات المستقلة الأكثر تأثيرا على ثمن السكن.

الفصل الثالث
نماذج المعادلات الاقتصادية الآنية

كان هدف الفصول السابقة هو تكوين وتقدير معاملات نماذج الانحدار ذات الدالة أو المعادلة الواحدة. أما موضوع هذا الفصل فهو تحليل طرق تحديد معاملات نماذج الانحدار التي تحتوي على أكثر من معادلة. هذه النماذج ذات المعادلات المتعددة تسمى عادة بنماذج المعادلات الآنية. هذه المعادلات هي عبارة عن صيغ رياضية تعبر عن العلاقات المتشابكة التي يتميز بها النشاط الاقتصادي وعن التأثير المتبادل للظواهر الاقتصادية بصفة عامة. لذلك فإن هذه النماذج تتميز بالتأثير المتبادل للمتغير المستقل والمتغير التابع. بعكس النماذج ذات المعادلة الواحدة التي تتميز كما رأينا سابقا بتأثير المتغير المستقل على المتغير التابع فقط.

III – 1 – تذكير بأهم القواعد النظرية:

هناك عدة أنواع من نماذج المعادلات الآنية.

– نموذج المعادلات الآنية المستقلة: عندما يكون كل متغير تابع (y) لأي معادلة (j) من هذا النموذج معبر عنه كدالة لنفس المجموعة من المتغيرات (x_i) :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + .. + a_{nm}x_m + \varepsilon_n \end{cases}$$

من أجل حل هذا النموذج وإيجاد معاملاته تستعمل طريقة المربعات الصغرى.

- نموذج المعادلات المتصلة (المتشابكة): عندما تكون نفس المتغيرات التابعة (y_j) موجودة في الطرف الأيمن في بعض المعادلات وفي الطرف الأيسر في معادلات أخرى.

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + .. + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1m}x_m + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + .. + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2m}x_m + \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + .. + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + .. + a_{nm}x_m + \varepsilon_n \end{cases}$$

الشكل الهيكلي للنموذج:

مجموعة المعادلات التي يتكون منها أي نموذج آني تسمى بالشكل الهيكلي للنموذج. وكل معادلة فيه تسمى بالمعادلة الهيكلية.

المتغيرات الداخلية: هي المتغيرات التي تتحدد قيمها داخل نموذج المعادلات المعطى.

المتغيرات الخارجية: المتغيرات التي تتحدد قيمها خارج النموذج.

المتغيرات المحددة سابقا (سلفا): هي المتغيرات الخارجية مضافا إليها المتغيرات الداخلية ذات فترة الإبطاء، بمعنى متغيرات داخلية في فترات زمنية سابقة.

معاملات المتغيرات (c , b ,a ....إلخ) تسمى المعاملات الهيكلية للنموذج.

الشكل المختزل لنموذج المعادلات الآنية: هو عبارة عن نموذج معادلات خطية مشتق من النموذج الهيكلي الأصلي، يكون فيه كل متغير داخلي دالة في المتغيرات المحددة سابقا للنموذج.

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + .. + \delta_{1m}x_m \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + .. + \delta_{2m}x_m \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + .. + \delta_{nm}x_m \end{cases}$$

حيث: δ_{ij} - هي معاملات الشكل المختزل للنموذج.

y_j — متغيرات داخلية، x_i - متغيرات خارجية.

تحديد معادلات الشكل الهيكلي للنموذج: يقال على أي معادلة من معادلات الشكل الهيكلي للنموذج أنها محددة تماما إذا كان بالإمكان الحصول على قيمة مقدرة واحدة فقط لكل معامل من معاملات انحدار هذه المعادلة. إذا كان ممكنا الحصول على أكثر من قيمة مقدرة واحدة لمعاملات معادلة هيكلية ما فإن هذه المعادلة توصف بأنها محددة أكثر من اللازم. أما إذا لم يكن بالإمكان الحصول على أي قيمة مقدرة لمعاملات انحدار معادلة ما، عندئذ نكون بصدد معادلة هيكلية غير محددة. يتم تحديد أي معادلة هيكلية بواسطة تطبيق شرطين: الشرط الضروري والشرط الكافي. يسمى أحيانا الشرط الضروري للتحديد بشرط الدرجة، أما الشرط الكافي فيطلق عليه شرط الرتبة. نجري اختبار الشرط الضروري أولا، إذا تحقق هذا الشرط في المعادلة المراد تحديدها، ننتقل إلى إجراء اختبار الشرط الكافي.

- الشرط الضروري لتحديد المعادلة الهيكلية (شرط الدرجة): إجراء هذا الاختبار يتطلب تحقيق القواعد التالية:

$D + 1 = N$: يعني أن المعادلة الهيكلية المعنية محددة تماما.

$D + 1 < N$: المعادلة غير محددة.

$D + 1 > N$: المعادلة محددة أكثر مما ينبغي.

حيث : N هو عدد المتغيرات الداخلية في المعادلة الهيكلية المراد تقديرها.

D : عدد المتغيرات المحددة سابقا أو عدد المتغيرات الخارجية التي لا تظهر في المعادلة المعنية، والموجودة في غيرها من معادلات النموذج.

- الشرط الكافي للتحديد (شرط الرتبة):

تكون المعادلة الهيكلية محددة، حسب هذا الشرط، إذا تحقق ما يلي:
- نحصر كل المتغيرات التي لم تظهر في المعادلة الهيكلية المراد تحديدها.
- نكون مصفوفة (A) بمعاملات هذه المتغيرات في المعادلات الأخرى.
- نسجل رتبة هذه المصفوفة ونحسب محددها: إذا كان $\det A = 0$ أو (و) رتبة المصفوفة A أقل من عدد المتغيرات الداخلية في النموذج ناقص واحد فإن المعادلة المعنية تعتبر غير محـــددة. أما إذا كان $\det A \neq 0$ ورتبة المصفوفة A ليس أقل من عدد المتغيرات الداخلية في النموذج ناقص واحد، فإن المعادلة تكون محددة.

من أجل توضيح طابع التحديد نرجع إلى الشرط الضروري(شرط الدرجة) الخاص بهذه المعادلة، السابق الحصول عليه. إذا كان $D + 1 = N$، فالمعادلة محددة تماما. أما إذا كان $D + 1 > N$ ، فتكون المعادلة حينئذ محددة أكثر مما ينبغي.

من أجل تقدير معاملات انحدار المعادلة الهيكلية المحددة تماما نستعمل طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، وذلك باتباع الخطوات التالية:
- تكوين الشكل المختزل للنموذج الهيكلي المعني، ثم تقدر قيم معاملات انحدار كل معادلة من معادلاته بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية.
- باستخدام التحليل الجبري يتم الانتقال من المعاملات المقدرة للشكل المختزل للنموذج إلى المعاملات المقدرة لشكله الهيكلي. بمعنى آخر يتم تقدير المعاملات الهيكلية انطلاقا من قيم المعاملات المختزلة.

أما من أجل تقدير معاملات انحدار المعادلة الهيكلية المحددة أكثر من اللازم فنستعمل طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين:

- نكون الشكل المختزل للنموذج، ثم نحسب قيم معاملاته المقدرة بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية.

- نحدد المتغيرات الداخلية، الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة الهيكلية المحددة أكثر من اللازم، والتي نريد تقديرها بواسطة طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين.

- نحسب القيم المقدرة لهذه المتغيرات بواسطة المعادلات المختزلة التي تكون فيها هذه المتغيرات موجودة في الطرف الأيسر. يتم ذلك بتعويض المتغيرات الخارجية، الموجودة في هذه المعادلات بقيمها الحقيقية (القيم الواردة في معطيات المسألة).

- يتم تعويض القيم الحقيقية للمتغيرات الداخلية، الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة الهيكلية المحددة أكثر من اللازم، بقيمها المقدرة المحصل عليها في الخطوة السابقة.

- باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، يجري تقدير معاملات المعادلة الهيكلية المعنية وذلك باستخدام القيم الحقيقية المعطاة للمتغيرات الخارجية والقيم المقدرة للمتغيرات الداخلية الموجودة في الطرف الأيمن والتي حصلنا عليها سابقا.

III – 2- تطبيقات

III- 2-1- تطبيقات على تكوين الشكل المختزل لنموذج المعادلات الهيكلية :

مثـــال 1 :

ليكن نموذج المعادلات الهيكلية التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = b_0 + a2_1x_1 + a_{23}x_3 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

المطلـــوب:

أوجد الشكل المختزل للنموذج الهيكلي السابق بافتراض أن المتغيرات الداخلية هي y_1 , y_2 , x_1 .

الحـــــل:

الشكل المختزل هو صيغة تكون فيها المتغيرات الداخلية دالة في المتغيرات الخارجية أو المحددة سلفا.

بما أن : $y_1 = y_2$ فإن :

$$a_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_0 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3$$

$$a_{11}x_1 - a_{21}x_1 = - a_0 + b_0 + a_{23}x_3 - a_{12}x_2$$

$$x_1 (a_{11} - a_{21}) = b_0 - a_0 - a_{12}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x_1 = \frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11} - a_{21}}.x_2 + \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{21}}.x_3$$

بتعويض x_1 بقيمته في المعادلة الأولى أو الثانية نحصل على الشكل المختزل لمعادلة y_2 أو y_1 .

$$y_1 = a_0 + a_{11}\left[\left(\frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}}\right) - \left(\frac{a_{12}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3\right] + a_{12}x_2$$

$$y_1 = a_0 + \left(\frac{a_{11}.b_0 - a_{11}.a_0}{a_{11} - a_{21}}\right) - \left(\frac{a_{11}.a_{12}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{11}.a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3 + a_{12}.x_2$$

$$y_1 = \left(\frac{a_0.a_{11} - a_0.a_{21} + a_{11}.b_0 - a_{11}.a_0}{a_{11} - a_{21}}\right) + \left(a_{12} - \frac{a_{11}.a_{12}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{11}.a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3$$

$$y_1 = \left(\frac{a_{11}.b_0 - a_0.a_{21}}{a_{11} - a_{21}}\right) - \left(\frac{a_{21}.a_{12}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{11}.a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3$$

من أجل تبسيط شكل هذه المعادلات نعبر عن معاملاتها بواسطة v_i) كالتالي:

$$; \ v_3 = \frac{-a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \ ; \ v_2 = \frac{a_{23}}{a_{11} - a_{21}} \ ; \ v_1 = \frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}}$$

$$v_5 = \frac{-a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \ ; \ v_4 = \frac{a_{11} \cdot b_0 - a_0 \cdot a_{21}}{a_{11} - a_{21}} \ ; \ v_6 = \frac{a_{11} \cdot a_{23}}{a_{11} - a_{21}}$$

ويصبح شكل المعادلات المختزلة السابقة هو:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 \\ y_1 = y_2 = v_4 + v_5 x_2 + v_6 x_3 \end{cases}$$

مثـــال 2 :

ما هو الشكل المختزل للنموذج الهيكلي التالي:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}.y_2 + a_{11}.x_1 + a_{13}.x_3 \\ y_2 = b_{21}.y_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 \end{cases}$$

بافتراض أن y_1 , y_2 هي متغيرات داخلية.

الحــــل:

استخراج معادلات الشكل المختزل:

$$y_2 = b_{21}.\ (b_{12}.y_2 + a_{11}.x_1 + a_{13}.x_3) + \ a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3$$

$$y_2 = \left(\frac{b_{21} \cdot a_{11}}{1 - b_{21} \cdot b_{12}} \right) \cdot x_1 + \left(\frac{a_{22}}{1 - b_{21} \cdot b_{12}} \right) \cdot x_2 + \left(\frac{b_{21} \cdot a_{13} + a_{23}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}} \right) \cdot x_3$$

$$y_1 = \left(\frac{a_{11}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}} \right) \cdot x_1 + \left(\frac{b_{12} \cdot a_{22}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}} \right) \cdot x_2 + \left(\frac{b_{21} \cdot a_{13} + a_{23}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}} \right) \cdot x_3$$

ويكون شكلها المبسط كالتالي:

$$y_1 = v_1.x_1 + v_2.x_2 + v_3.x_3$$
$$y_2 = v_4.x_1 + v_5.x_2 + v_6.x_3$$

مثـــــال 3 :

ليكن النموذج الكينزي، المحدد للدخل القومي، كالتالي:

$$\begin{cases} c = a_0 + b_1.y \\ y = c + I + G \end{cases}$$

المطلوب: تكوين الشكل المختزل لهذا النموذج الهيكلي بافتراض أن المتغيرات الداخلية هي: y , c .

الحـــــل :

$$c = a_0 + b_1.(c + I + G) = a_0 + b_1.c + b_1.I + b_1.G$$

$$c - b_1.c = a_0 + b_1.I + b_1.G$$

$$(1-b_1).c = a_0 + b_1.I + b_1.G$$

$$c = \left(\frac{a_0}{1-b_1}\right) + \left(\frac{b_1}{1-b_1}\right).I + \left(\frac{b_1}{1-b_1}\right).G$$

$$y = a_0 + b_1.y + I + G$$

$$(1-a_0).y = a + I + G \rightarrow y = \left(\frac{a_0}{1-a_0}\right) + \left(\frac{1}{1-a_0}\right).I + \left(\frac{1}{1-a_0}\right).G$$

$$c = v_1 + v_2.I + v_3.G \quad ; \quad y = v_4 + v_5.I + v_6.G$$

مثـــــال 4:

ليكن نموذج المعادلات الآنية التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 \\ y_2 = b_0 + a_{21}.x_1 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

المطلـــوب :

أوجد شكله المختزل بافتراض أن المتغيرات الداخلية هي: x_1 , y_1 , y_2

الحـــــل :

$$x_1 = \left(\frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}} \right) - \left(\frac{a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \right) . x_2$$

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{a_{11} . b_0 - b_0 . a_{21}}{a_{11} - a_{21}} \right) - \left(\frac{a_{21} . a_{12}}{a_{11} - a_{21}} \right) . x_2$$

يكون الشكل المبسط لهما هو:

$$x_1 = v_1 - v_2 . x_2$$

$$y_1 = y_2 = v_3 - v_4 . x_2$$

حيث أن:

$$v_1 = \frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}} \quad ; \quad v_2 = \frac{- a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$$

$$v_3 = \frac{a_{11} . b_0 - b_0 . a_{21}}{a_{11} - a_{21}} \quad ; \quad v_4 = \frac{a_{21} . a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$$

مثـــــال 5 :

كون معادلات الشكل المختزل للنموذج الهيكلي التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_{11} . x_1 \\ y_1 = b_0 + a_{21} . x_1 + a_{22} . x_2 + a_{23} . x_3 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

بافتراض أن المتغيرات الداخلية هي : x_1 , y_1 , y_2

الحـــــل:

$$y_1 = y_2$$

$$a_0 + a_{11} . x_1 = b_0 + a_{21} . x_1 + a_{22} . x_2 + a_{23} . x_3$$

$$(a_{11} - a_{21}) . x_1 = (b_0 - a_0) + a_{22} . x_2 + a_{23} . x_3$$

$$x_1 = \left(\frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}} \right) + \left(\frac{a_{22}}{a_{11} - a_{21}} \right) . x_2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11} - a_{21}} \right) . x_3$$

$$y_1 = y_2 = b_0 + a_{21}.\left[\left(\frac{b_0 - a_0}{a_{11} - a_{21}}\right) + \left(\frac{a_{22}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3\right] +$$

$$+ \qquad a_{22}.x_2 \qquad + \qquad a_{23}.x_3$$

$$y_1 = y_2 = b_0 + \left(\frac{a_{21}.b_0 - a_{21}.a_0}{a_{11} - a_{21}}\right) + \left(\frac{a_{21}.a_{22}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{21}.a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3 +$$

$$+ \qquad a_{22}.x_2 \qquad + \qquad a_{23}.x_3$$

$$y_1 = y_2 = \left(\frac{a_{11}.b_0 - a_0.a_{21}}{a_{11} - a_{21}}\right) + \left(\frac{a_1.a_{22}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{11}.a_{23}}{a_{11} - a_{21}}\right).x_3$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 + v_2.x_2 + v_3.x_3 \\ y_1 = y_2 = v_4 + v_5.x_2 + v_6.x_3 \end{cases}$$

III - 2-2- تطبيقات على تحديد معادلات الشكل الهيكلي.

مثـــــال1 :

ليكن الشكل الهيكلي لنموذج المعادلات الآنية التالي:

$$y_1 = a_0 + a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + b_{12}.y_2 + b_{13}.y_3$$
$$y_2 = b_0 + a_{23}.x_3 + b_{21}.y_1 + b_{23}.y_3$$
$$y_3 = c_0 + b_{31}.y_1 + b_{32}.y_2$$

المطلــوب:

اختيار طبيعة تحديد المعادلات الهيكلية التي يتكون منها هذا النموذج.

الحـــــل:

النموذج يتكون من ثلاث متغيرات داخلية (y_1 , y_2 , y_1) وثلاثة خارجية (x_3 , x_2 , x_1) . نجري اختبار التحديد لكل معادلة من هذا النموذج.

المعادلة الأولى:

الشرط الضروري للتحديد (شرط الدرجة):

عدد المتغيرات الداخلية الموجودة في هذه المعادلة هي ثلاثة (y_3 , y_2 ,y_1) أي أن : $N = 3$ عدد المتغيرات الخارجية التي لم تظهر فيها وتظهر في المعادلات الأخرى هو واحد (x_3) . أي أن : $D = 1$. إذن : $D + 1 < N$ ← ($1 + 1 < 3$). لذلك فإن هذه المعادلة الهيكلية غير محددة.

الشرط الكافي للتحديد (شرط الرتبة):

بما أن الاختبار السابق قد أظهر أن هذه المعادلة الهيكلية غير محددة، فليس هناك ضرورة لإجراء اختبار الرتبة عليها.

المعادلة الثانية:

الشرط الضروري (شرط الدرجة): عدد المتغيرات الداخلية الموجودة في هذه المعادلة هي ثلاثة(y_3, y_2, y_1) أي أن : $N = 3$. عدد المتغيرات الخارجية التي لم تظهر فيها وتظهر في المعادلات الأخرى هما اثنان (x_2, x_1) . أي أن : $D = 2$. لذلك فإن $D + 1 = N$ ←($2 + 1 = 3$) . هذه المعادلة هي محددة تماما.

الشرط الكافي للتحديد (شرط الرتبة): المتغيرات التي لم تظهر في هذه المعادلة الهيكلية هي 2 (x_2 , x_1). مصفوفة معاملات هذه المتغيرات في المعادلات الأخرى للنموذج هي: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = a_{11}.0 - a_{12}.0 = 0$. بالرغم من أن رتبة المصفوفة $A = 2$ (وهو ليس أقل من عدد المتغيرات الداخلية للنموذج – 1) .

لكن محدد هذه المصفوفة = 0. إذن فهذه المعادلة لا تستجيب لشرط التحديد حسب هذا الاختبار، فهي إذن غير محددة.

المعادلة الثالثة:

الشرط الضروري: عدد المتغيرات الداخلية في هذه المعادلة ثلاثة $(y_3\ ,\ y_2\ ,\ y_1)$. أما عدد المتغيرات الخارجية الغير موجودة فيها والموجودة في المعادلات الأخرى فهي ثلاثة أيضا : $(\ x_3\ ,\ x_2\ ,\ x_1\ )$. في كون $N = 3\ ,\ D = 3$. شرط الاختبار هو: $(3 + 1 > 3) \leftarrow D + 1 > N \leftarrow (3 < 1 + 3)$. هذه المعادلة الهيكلية هي إذن محددة أكثر من اللازم .

الشرط الكافي: المتغيرات الغائبة في هذه المعادلة الهيكلية هي ثلاثة $(\ x_3\ ,\ x_2\ ,\ x_1\ )$. مصفوفة معاملات هذه المتغيرات في المعادلتين الأولى والثانية هي: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{vmatrix}$. رتبة هذه المصفوفة=2 وهو ليس أقل من عدد المتغيرات الداخلية للنموذج – 1 .

محدد المصفوفة المربعة (2×2) للمصفوفة الأصلية: $0 \neq \det \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix}$ $A_1^{*}=$ لا يساوي الصفر وكذلك محدد المصفوفة المربعة (2×2) لهذه المصفوفة $\neq 0$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix}$ لا يساوي الصفر.

لذلك مادام هنالك على الأقل محدد مربع واحد (2×2) لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر، فإن هذه المعادلة الهيكلية تستجيب لاختبار التحديد حسب هذا الشرط. لمعرفة طابع تحديدها نرجع إلى الشرط الضروري الذي أجري سابقا والذي أوضح أن هذه المعادلة محددة أكثر من اللازم $(D + 1 > N)$.

مثـــال 2:

ليكن نموذج المعادلات الآنية التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + b_{12}.y_2 \\ y_2 = b_0 + b_{21}.y_1 + b_{23}.y_3 + a_{23}.x_3 \end{cases}$$

بين طبيعة تحديد المعادلات الهيكلية المكونة لهذا النموذج، حيث أن المتغيرات الداخلية له هي:

(y_3 , y_2 , y_1) والمتغيرات الخارجية هي: (x_3 , x_2 , x_1).

الحـــل:

تحديد المعادلة الأولى:

الشرط الضروري للتحديد: عدد المتغيرات الداخلية لهذه المعادلة هي: 2 (y_2 , y_1) . فتكون $N= 2$. عدد المتغيرات الخارجية التي لا تظهر في هذه المعادلة هو "0"، أي أن $D = 0$.

إذن $D + 1 < N \leftarrow 0 + 1 < 2$. هذا يعني أن هذه المعادلة الهيكلية غير محددة.

المعادلة الثانية: اختبار الشرط الضروري: المتغيرات الداخلية الموجودة فيها: 3 (y_3 , y_2 , y_1) . أي:

$N = 3$. المتغيرات الخارجية التي لا توجد في هذه المعادلة وتوجد في المعادلة الأولى : 2 (x_2 , x_1) . أي : $D = 2$.

ومنه فإن شرط التحديد في هذه الحالة هو: $N = D + 1 \leftarrow (2+1=3)$ ، وبالتالي فهذه المعادلة محددة تماما.

III – 2– 3- تطبيقات على تقدير نماذج المعادلات الآنية:

مثـــــال1 : لدينا نموذج المعادلات الآنية التالي:

$$\begin{cases} y_1 = b_{13}.y_3 + a_{11}.x_1 + a_{13}.x_3 \\ y_2 = b_{21}.y_1 + b_{23}.y_3 + a_{22}.x_2 \\ y_3 = b_{32}.y_2 + a_{31}.x_1 + a_{33}.x_3 \end{cases}$$

المتغيرات الداخلية هي (y_1, y_2, y_3) والمتغيرات الخارجية هي (x_1, x_2, x_3) .

المطلوب:

1- أوضح طبيعة تحديد المعادلات الهيكلية الموجودة في هذا النموذج.

2- إذا كان الشكل المختزل المقدر للنموذج الهيكلي المعطى هو:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \\ \hat{y}_2 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \\ \hat{y}_3 = -5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

أوجد المعادلات المقدرة للنموذج الهيكلي السابق.

الحـــــل:

1 – تحديد المعادلات الهيكلية:

المعادلة الأولى: اختبار الشرط الضروري. المتغيرات الداخلية الموجودة في المعادلة الأولى هي:2 (y1 , y3). المتغيرات الخارجية الغير موجودة في هذه المعادلة وموجودة في غيرها هي : 1 (x_2) . فيكون شكل الاختبار الضروري هو : $N = D + 1 \leftarrow (1 + 1 = 2)$. لذلك فالمعادلة الأولى محـــددة تماما.

اختبار الشرط الكافي: في المعادلة الأولى لا تظهر المتغيرات (x_2 , y_2) (.مصفوفة معاملات هذه المتغيرات في المعادلات الأخرى للنموذج هي:

$A = \begin{vmatrix} -1 & a_{22} \\ b_{32} & 0 \end{vmatrix}$ ويكون : $\det A = -1 . 0 - b_{32} . a_{22} \neq 0$. إذن محدد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر ورتبتها تساوي 2 . لذلك فهذه المعادلة تستجيب لاختبار الشرط الكافي للتحديد، وتكون بالتالي محددة تماما.

المعادلة الهيكلية الثانية: اختبار الشرط الضروري: المتغيرات الداخلية الموجودة في هذه المعادلة هي: 3 (y_3 , y_2 , y_1) . المتغيرات الخارجية الغير ممثلة فيها هي: 2 (x_1 , x_3) . فيكون شرط الاختبار هو:

$D + 1 = N \leftarrow (2+1 = 3)$ والمعادلة هي إذن محددة تماما.

الشرط الكافي: في المعدلة الثانية لا تظهر المتغيرات (x_3 , x_1) . معاملات هذه المتغيرات في معادلات النموذج الأخرى معبر عنها في المصفوفة A التالية: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ ويكون محددها هو:

$\det A = a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13} \neq 0$. محدد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر ورتبتها ليست أقل من عدد المتغيرات الداخلية في النموذج -1 (رتبتها = 2) . هذه المعادلة تحقق شروط التحديد الكافي، فهي إذن أيضا محددة تماما.

المعادلة الثالثة: اختبار الشرط الضروري: المتغيرات الداخلية التي تظهر فيها هي: 2 (y_2 , y_3) . المتغيرات الخارجية التي لا تظهر فيها وتظهر في المعادلات الأخرى هي: 1 (x_2) . فيكون:

$N + 1 \; D \rightarrow (1+1=2)$. المعادلة الهيكلية الثالثة محددة تماما حسب اختبار هذا الشرط.

اختبار الشرط الكافي: المتغيرات التي لا تظهر في هذه المعادلة هي: (y_1 , x_2). مصفوفة هذه المعاملات في المعادلات الأخرى هي:

$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ وبالتالي $\det A = -1 . a_{22} - 0 . b_{21} \neq 0$. محدد

هذه المصفوفة لا يساوي الصفر ورتبتها = 2 وهي ليست أقل من عدد المتغيرات الداخلية في النموذج -1. المعادلة الهيكلية الثالثة محددة حسب هذا الشرط ، فهي أيضا محددة تماما مثل المعادلتين السابقتين.

كل معادلات النموذج الهيكلي المعطى محددة تماما ونستطيع تقديرها بواسطة طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة بالاعتماد على المعادلات المختزلة لهذا النموذج والمعطيات الحقيقية للمتغيرات التي يتكون منها.

2- تقدير النموذج: الشكل المقدر للمعادلات المختزلة للنموذج الهيكلي السابق المحصل عليه بواسطة طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة هو:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \\ \hat{y}_2 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \\ \hat{y}_3 = -5x_1 + 8x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

هذا الشكل يسمح بحساب المعادلات الهيكلية للنموذج المعطى.

المعادلة الهيكلية الأولى: نظرا لأن المتغير x_2 غير موجود في المعادلة الهيكلية الأولى، فنستعمل المعادلة المختزلة الثالثة من أجل التعبير عن قيمة هذا المتغير بدلالة المتغيرات الأخرى الموجودة في هذه المعادلة:

$x_2 = \frac{y_3 + 5x_1 - 5x_3}{8}$. هذه العبارة تحتوي على كل المتغيرات (y_3 , x_1 , x_3)التي تتكون منها المعادلة الهيكلية الأولى. نعوض هذه العبارة في المعادلة المختزلة الأولى:

$\hat{y}_1 = 2x + 4 \cdot \frac{y_3 + 5x_1 - 5x_3}{8} + 10x_3$ فنحصل على المعادلة الهيكلية الأولى:

$$\hat{y}_1 = 7{,}5x_3 + 0{,}5y_3 + 4{,}5x_1$$

المعادلة الهيكلية الثانية: في المعادلة الهيكلية الثانية لا توجد المتغيرات (x_1 , x_3) . المعاملات الهيكلية لهذه المعادلة نحددها في مرحلتين:

المرحلة الأولى: نعبر عن x_1 في هذه الحالة من خلال المعادلة المختزلة الأولى أو الثالثة. فإذا عبرنا عنه من خلال المعادلة الأولى مثلا:

$x_1 = \frac{y_1 - 4x_2 - 10x_3}{2} = 0{,}5y_1 - 2x_2 - 5x_3$ وعوضنا هذه العبارة في المعادلة المختزلة الثانية فإن هذا لن يحل المسألة حلا نهائيا، نظرا لأن العبارة المحصل عليها ستحتوي على المتغير x_3 الذي لا يوجد في المعادلة الهيكلية الثانية. نعبر عن x_3 من خلال المعادلة المختزلة الثالثة:

$x_3 = \frac{y_3 + 5x_1 - 8x_2}{5}$ ونعوضه بقيمته في العبارة السابقة ل x_1 :

$x_1 = 0{,}5y_1 - 2x_2 - 5 \cdot \frac{y_3 + 5x_1 - 8x_2}{5}$. بعد

الاختصار: $x_1 = \frac{0.5y_1 - y_3 + 6x_2}{6}$.

المرحلة الثانية: بنفس المنهج، من أجل التعبير عن x_3 بدلالة متغيرات المعادلة الهيكلية الثانية(y_1, y_3 , x_2) نعوض x_1 بقيمته المحصل عليها من المعادلة المختزلة الأولى في عبارة x_3 السابقة:

$$x_3 = \frac{y_3 + (0{,}5 - 2x_2 - 5x_3) - 8x_2}{5} = 0{,}2y_3 + 0{,}5y_1 - 3{,}6x_2 - 5x_3$$

ومنه: $x_3 = 0{,}033y_3 + 0{,}083y_1 - 0{,}6x_2$.

نعوض عبارتي x_1, x_3 المحصل عليهما في المعادلة المختزلة الثانية :

$$y_2 = 3.\left(\frac{0{,}5.\, y_1 - y_3 + 6x_2}{6}\right) - 6x_2 +$$
$$+ 2(\ 0{,}033y_3 + 0{,}083y_2 - 0{,}6x_2\ )$$

ومنه نحصل على المعادلة الهيكلية الثانية:

$$\hat{y}_2 = 0{,}416y_1 - 0{,}434y_3 - 4{,}2x_2$$

هذه المعادلة الهيكلية كان بالإمكان الحصول عليها من المعادلات المختزلة بطريقة أخرى. جمع المعادلات المختزلة مع بعضها البعض، حيث نحصل على المقدار التالي: $y_1 + y_2 + y_3 = 6x_2 + 17x_3$. ثم نلغي x_1 من المعادلتين المختزلتين الأولى والثانية وذلك بضرب المعادلة الأولى في (3) والثانية في (-2) وجمعهما.

$$\begin{cases} 3.\ y_1 = 3.(\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3\ ) \\ -2.\ y_2 = -2.\ (\ 3x1 - 6x_2 + 2x_3 \quad - \end{cases}$$

فنحصل على معادلة أخرى : $3y_1 - 2y_2 = 24x_2 + 26x_3$. من المعادلتين المحصل عليهما نلغي المتغير(x_3) وذلك بضرب الأولى في (-26) والثانية في (17) ثم جمعهما:

$$(-26).\ (\ y_1 + y_2 + y_3 = 6x_2 + 17x_3\ )$$
$$(\ 17).(\ 3y_1 - 2y_2 = 24x_2 + 26x_3\ )$$

هذه العملية تسمح بالحصول على العبارة التالية:

$25y_1 - 60y_2 - 26y_3 = 252x_3$ ومنها نحصل على المعادلة الهيكلية المقدرة الثانية: $\hat{y}_2 = 0{,}416y_1 - 0{,}434y_3 - 4{,}2x_3$.

المعادلة الهيكلية الثالثة:

نظرا لأن المتغير x_2 لا يوجد في المعادلة الهيكلية الثالثة، فنعبر عن هذا المتغير بدلالة متغيرات المعادلة المختزلة الثانية:

$$x_2 = \frac{-y_2 + 3x_1 + 2x_3}{6} = -0,167y_2 + 0,5x_1 + 0,333x_3 .$$

نعوض هذه العبارة في المعادلة المختزلة الثالثة فنحصل على الصيغة التالية: $y_3 = -5x_1 + 8 .(-0,167y_2 + 0,5x_1 + 0,333x_3) + 5x_3$

ومنها نحصل على القيمة المقدرة للمعادلة الهيكلية الثالثة:

$$\hat{y}_3 = -1,336y_2 - x_1 + 7,664x_3 .$$

يمكن كتابة الشكل المقدر للنموذج الهيكلي السابق كالتالي:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 0,5y_3 + 4,5x_1 + 7,5x_3 \\ \hat{y}_2 = 0,416y_1 - 0,434y_3 - 4,2x_2 \\ \hat{y}_3 = -1,336y_2 - x_1 + 7,664x_3 \end{cases}$$

مثـــال2:

نريد دراسة النموذج الهيكلي الآني التالي:

$$\begin{cases} y = a_1 + b_1.(c + D) + \varepsilon_1 \\ c = a_2 + b_2.\ y + b_3.\ y_{-1} + \varepsilon_2 \end{cases}$$

حيث:

y : الدخل الوطني الإجمالي.

y_{-1} : الدخل الوطني الإجمالي للفترة السابقة.

c : الإنفاق على الاستهلاك الشخصي.

D : الطلب الكلي ماعدا الطلب على الاستهلاك الشخصي.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$: حد الخطأ – تمثل كل العوامل الأخرى المؤثرة على الإنفاق الاستهلاكي والدخل الوطني والتي يصعب أخذها بعين الاعتبار بوضوح (من أجل التبسيط سوف يتم إهمال هذين المتغيرين).
المعطيات الخاصة بتطور متغيرات النموذج خلال 9 سنوات مجمعة في الجدول التالي. حيث : c , y هي متغيرات داخلية ، y_{-1} , D متغيرات خارجية.

c	y	y_{-1}	D	السنة	c	y	y_{-1}	D	السنة
8,6	37,2	17,8	44,7	6	7,4	3,1	46,7	-6,8	1
30	35,7	37,2	23,1	7	30,4	22,8	3,1	22,4	2
31,4	46,6	35,7	51,2	8	1,3	7,8	22,8	-17,3	3
39,1	56	46,6	32,3	9	8,7	21,4	7,8	12	4
182,7	248,4	239,1	167,5	Σ	25,8	17,8	21,4	5,9	5

المطلوب:

1- تكوين الشكل المختزل المقدر للنموذج الهيكلي المعطى.

2- إجراء تحديد النموذج الهيكلي.

3-حساب معاملات معادلات النموذج الهيكلي السابق(تقدير المعادلات الهيكلية).

الحـــل:

1-استخراج الشكل المختزل للنموذج:

لدينا :

$$y = a_1 + b_1.(c + D)$$

$$c = a_2 + b_2.y + b.y_{-1}$$

إذن :

$$y = a_1 + b_1.c + b_1.D$$

$$y = a_1 + b_1.(a_2 + b_2.y + b_3.y_{-1}) + b_1.D$$

$$y = a_1 + b_1.a_2 + b_1.b_2.y\ b_1.b_3.y_{-1} + b_1.D$$
$$y - b_1.b_2.y = (a_1 + b_1.a_2) + (b_1.b_3).y_{-1} + b_1.D$$

المعادلة المختزلة الأولى هي:

$$y = \left(\frac{a_1 + b_1.a_2}{1-b_1.b_2}\right) + \left(\frac{b_1.b_3}{1-b_1.b_2}\right).y_{-1} + \left(\frac{b_1}{1-b.b_2}\right).D$$

$$c = a_2 + b_2.\left[\left(\frac{a_1 + b_1.a_2}{1-b_1.b_2}\right) + \left(\frac{b_1.b_3}{1-b_1.b_2}\right).y_{-1} + \left(\frac{b_1}{1-b_1.b_2}\right).D\right] +$$
$$+ b_3.y_{-1}$$

$$c = a_2 + \left(\frac{b_2.a_1 + b_2.b_1.a_2}{1-b_1.b_2}\right) + \left(\frac{b_2.b_1.b_3}{1-b_1.b_2}\right).y_{-1} + \left(\frac{b_2.b_1}{1-b_1.b_2}\right).D +$$
$$+ b_3.y_{-1}$$

ومنه تكون المعادلة المختزلة الثانية هي:

$$c = \left(\frac{a_2 - b_2.a_1}{1-b_1.b_2}\right) + \left(\frac{b_2.b_1}{1-b_1.b_2}\right) \times D + \left(\frac{b_3}{1-b_1.b_2}\right).y_{-1}$$

ويكون الشكل المبسط للنموذج المختزل كالتالي:

$$\begin{cases} y = v_1 + v_2.D + v_3.y_{-1} \\ c = v_4 + v_5.D + v_6.y_{-1} \end{cases}$$

انطلاقا من معطيات الجدول السابق وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على المعاملات المقدرة للمعادلات المختزلة السابقة كالتالي:

$$\begin{cases} \hat{y} = 8,219 + 0,6688.D + 0,261.y_{-1} \\ \hat{c} = 8,636 + 0,3384.D + 0,202.y_{-1} \end{cases}$$

2- تحديد النموذج الهيكلي:

المعادلة الأولى: ما دام أن معاملي المتغيرين (D, c) في هذه المعادلة يخضعان لقيد التساوي: لهما نفس المعامل، لذلك فإن (c) في هذه المعادلة لا يعتبر متغير داخلي، نظرا لأنه يشارك فيها ليس بصفة مستقلة بل مرتبط بالمتغير(D). من هنا فإننا نعتبر أن عدد المتغيرات الداخلية في هذه المعادلة هو واحد فقط(y) . أي أن($N = 1$) .

عدد المتغيرات الخارجية الغير ممثلة في هذه المعادلة، والتي هي ممثلة في المعادلة الثانية هي: 1 (D) .لذلك فإن معيار التحديد في هذه الحالة يكون: $D + 1 > N \leftarrow (1+ 1 > 1)$. هذا يعني أن المعادلة الأولى محددة أكثر من اللازم.

المعادلة الهيكلية الثانية: هذه المعادلة تحتوي على متغيرين داخليين (c , y) وبالتالي $N = 2$.أما المتغيرات الخارجية الغير ممثلة فيها فهي (D) . أي : $D = 1$. بعبارة أخرى، مقياس شرط التحديد لهذه المعادلة هو : $D + 1 = N \leftarrow (1 + 1 = 2)$. فهي إذن محددة تماما.

3-تقدير المعادلات الهيكلية للنموذج:

- المعادلة الهيكلية الثانية: نظرا لأن هذه المعادلة محددة تماما فإن معاملاتها الهيكلية نستخرجها من المعادلات المختزلة المقدرة باستخدام التحليل الجبري. نلاحظ أن المتغير (D) غير موجود في المعادلة الهيكلية الثانية، فنستخرجه من المعادلة المختزلة الأولى بدلالة (y ,y_{-1}) ثم نعوض في المعادلة المختزلة الثانية، فنحصل على المعادلة الهيكلية المقدرة الثانية: $\hat{c} = 4,49 + 0,078.y_{-1} + 0,5.y$.

- المعادلة الهيكلية الأولى: نظرا لأن هذه المعادلة الهيكلية هي محددة أكثر مما ينبغي، فإن تقديرها يتم باستعمال طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين. المتغير الداخلي الموجود في الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو (c) . نحسب القيم المقدرة (القيم النظرية) لهذا المتغير ($\hat{c}$) بواسطة المعادلة المختزلة الثانية، نظرا لأن هذا المتغير يوجد في طرفها الأيسر: $\hat{c} = 8,636 + 0,3384.D + 0,202.y_{-1}$.

بحيث نعوض $(y_{-1}\ ,\ D)$ بقيمهما الحقيقية المعطاة في جدول بيانات المسألة. فنحصل على القيم التالية: $\hat{c}_1 = 15,8\ ,\ \hat{c}_2 = 16,8\ ,\ \hat{c}_3 = 7,4$ .....إلخ .
بالاعتماد على هذه القيم وقيم (D) الفعلية نكون الجدول التالي:

y	$\hat{c}$+D	$\hat{c}$	D	السنة	$\hat{c}$+D	$\hat{c}$	D	y	السنة
37,2	72,1	27,4	44,7	6	9	15,8	-6,8	3,1	1
35,7	47,1	24	23,1	7	39,2	16,8	22,4	22,8	2
46,6	84,4	33,2	51,2	8	-9,9	7,4	-17,3	7,8	3
56	61,3	29	32,3	9	26,3	14,3	12	21,4	4
248,4	350,4	182,9	167,5	Σ	20,9	15	5,9	17,8	5

اعتمادا على هذا الجدول وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية نحسب (نقدر) معاملات المعادلة الهيكلية الثانية، حيث يتم تعويض قيم (c) الحقيقية بقيمه التقديرية ($\hat{c}$) المحصل عليها أعلاه. الشئ الذي يمكننا من حساب قيم المتغير ($\hat{c}$+ D) . إذا عبرنا عن ($\hat{c}$ +D) ب: z ، فإن

المعادلة الهيكلية الأولى المراد تقديرها تأخذ الشكل التالي: $\hat{y} = a_1 + b_1.z$.

المعادلات الطبيعية التي تحقق شرط المربعات الصغرى هي:

$$\begin{cases} \Sigma y = n.a_1 + b_1.\Sigma z \\ \Sigma y.z = a_1.\Sigma z + b.\Sigma z^2 \end{cases}$$

بالاعتماد على معطيات الجدول السابق نحصل على:

$$\begin{cases} 248,4 = 9.a_1 + 350,4.b_1 \\ 13508,71 = 350,4.a_1 + 21142,02.b_1 \end{cases}$$

$$a = 7,678 \quad ; \quad b_1 = 0,512$$

ومنه المعادلة الهيكلية الأولى المقدرة للنموذج السابق تكون:

$$\hat{y} = 7,678 + 0,512.(\, c + D\,)$$

مثـــــال 3:

ليكن النموذج الهيكلي التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + b_{12}.y_2 + a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 \\ y_2 = b_0 + b_{21}.y_1 \end{cases}$$

المتغيرات الداخلية هي: y_2 , y_1

المتغيرات الخارجية : x_2 , x_1

معطيات هذا النموذج مقدمة في الجدول أدناه:

المطلوب:

1- إجراء اختبار التحديد لمعادلات هذا النموذج.

2-تقدير معاملات انحدار هذا النموذج.

x_{2i}	x_{1i}	y_{2i}	y_{1i}
53,5	74,8	144,2	503,7
57,4	71,7	148,7	520,1
63,4	83	150,9	560,3
64,2	87,1	156,5	590,5
65,2	94	163,7	632,4
66,9	108,1	171,3	684,9
77,8	121,4	175,4	749,9
90,7	116,6	186,9	793,9
98,8	126	201,7	864,2
98,8	139	208,7	93,3
96,2	136,3	221,4	977,1
97,6	153,7	235,3	1054,9
104,9	179,3	255,8	1158
106,6	209,4	271,5	1294,9
116,4	208,9	283,8	1396,7

الحـــــل:

- تكوين الشكل المختزل وتقديره : نعبر عن المتغيرات الداخلية بدلالة المتغيرات الخارجية أو الداخلية المحددة سلفا فنحصل على الشكل المختزل لهذا النموذج الذي نعرضه كالتالي:

$$y_1 = v_1 + v_2.x_1 + v_3.x_2$$
$$y_2 = v_4 + v_5.x_1 + v_6.x_2$$

يتم تقدير معاملات هذه المعادلات المختصرة باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، وذلك باستخدام المعطيات الفعلية الواردة في الجدول أعلاه. من أجل تقدير المعادلة المختزلة الأولى يجب حساب معاملاتها (v_1, v_2, v_3) . لذلك نقـــوم بحســـاب قيمة المحددات Δ , Δ_{v1} , Δ_{v2} , Δ_{v3} .

من أجل حساب هذه المقادير نقوم بإيجاد القيم التالية انطلاقا من معطيات الجدول السابق:

Σy_{1i}	Σx_{1i}	Σx_{2i}	$\Sigma y_1.x_1$	$\Sigma y_1.x_2$	$\Sigma x_1.x_2$	Σx_1^2	Σx_2^2
12711,8	1909,3	1258,4	1794065,1	1143974,3	172094,4	271100,9	111523,8

$$\Delta = 376317860\ ,\ \Delta_{v1} = -\ 16855099000\ ,$$
$$\Delta_{v2} = 1856090310\ ,\ \Delta_{v3} = 1185401259$$

$$v_1 = \frac{\Delta_{v1}}{\Delta} = -\ 44,79\ ;\ v_2 = \frac{\Delta_{v2}}{\Delta} = 4,93\ ;\ v_3 = \frac{\Delta_{v3}}{\Delta} = 3,15$$

الشكل المقدر للمعادلة المختزلة الأولى هو:

$$\hat{y}_{1i} = -\ 44,79 + 4,93.x_1 + 3,15.x_2$$

من أجل تقدير المعادلة المختزلة الثانية نحسب قيم Δ , Δ_{v4} , Δ_{v5} , Δ_{v6} التي تسمح بحساب معاملات هذه المعادلة. بالإضافة إلى قيم المقادير المحصل عليها أعلاه نقوم بإعداد المقادير التالية ونستعملها في استخراج قيم(Δ).

	$y_{2i}.x_2$	$y_{2i}.x_1$	y_{2i}
Σ	262216,7	407364	110,7

$$\Delta_{v4} = -\ 1131668476000\ ;\ \Delta_{v5} = -\ 6466735121$$
$$\Delta_{v6} = 23633137860$$

$$v_4 = \frac{\Delta_{v4}}{\Delta} = -\ 3007,2\ ,\ v_5 = \frac{\Delta_{v5}}{\Delta} = -\ 17,18\ ,\ v_6 = \frac{\Delta_{v6}}{\Delta} = 62,8$$

الشكل المقدر للمعادلة المختصرة الثانية هو:

$$\hat{y}_{2i} = -\ 300,2 - 17,18.x_1 + 62,8.x_2$$

إجراء اختبار التحديد:

المعادلة الهيكلية الأولى: اختبار الشرط الضروري للتحديد. عدد المتغيرات الداخلية الموجـــودة في هذه المعـــادلة هي: 2 (y_2 , y_1) .

أي أن : $N = 2$. عدد المتغيرات الخارجية التي لم تظهر فيها وتظهر في المعادلة الأخـــرى هي " 0 " . أي أن : $D = 0$. إذن $N > D + 1$ ← $(0 + 1 < 2)$. المعادلة الهيكلية الأولى هي غير محددة.

المعادلة الهيكلية الثانية: عدد المتغيرات الداخلية الموجودة في هذه المعادلة هي: (y_2 , y_1). لذلك فإن: $N = 2$. عدد المتغيرات الخارجية التي لم تظهر في هذه المعادلة وتظهر في المعادلة الأولى هي: 2 (x_2 , x_1) . أي أن : $D = 2$. فيكون : $D + 1 > N$ ← $(2 + 1 > 2)$. المعادلة الهيكلية الثانية محددة أكثر من اللازم.

تقدير المعادلات الهيكلية :

بما أن المعادلة الهيكلية الأولى غير محددة، فنكتفي بتقدير المعادلة الثانية فقط. تقدير هذه المعادلة يتم باستعمال طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (نظرا لأن هذه المعادلة هي محددة أكثر من اللازم).

– المتغير الداخلي الموجود في الطرف الأيمن من هذه المعادلة الهيكلية هو(y_1) .

– نحسب القيمة المقدرة لهذا المتغير $(\hat{y}_1)$ بواسطة المعادلة المختزلة الأولى، نظرا لأن هذا المتغير يظهر في طرفها الأيسر:

$\hat{y}_{1i} = - 44{,}79 + 4{,}93.x_1 + 3{,}15.x_2$. بحيث يتم تعويض x_2 , x_1 بقيمها المعطاة في جدول البيانات الفعلية السابق. هذا الحساب يسمح لنا بالحصول على قيـــم $\hat{y}_{1i}$ ($\hat{y}_{11}= 492{,}6$ ؛ $\hat{y}_{12} = 489{,}4$ ؛ $\hat{y}_{13} =564{,}1$; .... إلخ). من أجل تقدير المعادلة الهيكلية الثانية المحددة أكثر من اللازم، نعوض y_1 بقيمتها المقدرة $\hat{y}_1$ ثم نجرى انحدار y_2

على $\hat{y}_1$ فتأخذ المعادلة الهيكلية الثانية الشكل: $y_2 = b_0 + b_{21}.\hat{y}_1$ باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية على معطيات الجدول الثاني أدناه نحسب قيم Δ ، Δ_{b0} ، Δ_{b21}

$\hat{y}_{1i}$	y_{2i}	$\hat{y}_{1i}$	y_{2i}
492,5	144,2	887,6	201,7
489,5	148,7	951,7	208,7
564,1	150,9	930,2	221,4
586,8	156,5	1020,4	235,3
624	163,7	1169,6	255,8
698,9	171,3	1323,3	271,5
798,8	175,4	1351,7	283,8
815,8	186,9		

فنحصل على الشكل المقدر لهذه المعادلة كالتالي: $\hat{y}_2 = 60,79 + 0,16.\hat{y}_1$

مثـــال 4:

ليكن نموذج المعادلات الآنية التالي:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}.y_2 + a_{11}.x_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 = b_{21}.y_1 + a_{22}.x_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

حيـــــث :

y_1 - استهلاك الفرد السنوي من لحم الغنم (كغ).

y_2- ثمن البيع بالجملة لهذا النوع من الحم (دولار/كغ).

x_1- دخل الفرد السنوي (دولار).

x_2- تكاليف معالجة وتحضير اللحم(% من الثمن).

ε_1 ، ε_2- حد الخطأ.

المعطيات الخاصة بمتغيرات هذا النموذج خلال الفترة 1990-1994 معطاة في الجدول التالي.

السنة	استهلاك الفرد السنوي من لحم الغنم	ثمن البيع بالجملة	دخل الفرد السنوي	تكاليف المعالجة والتحضير
1990	60	5	1300	60
1991	62	4	1300	56
1992	65	4,2	1500	56
1993	62	5	1600	63
1994	66	3,8	1800	50

المطلوب:

1- استخراج الشكل المختزل المقدر لهذا النموذج.

2- توضيح طبيعة تحديد معادلات هذا النموذج.

3- تقدير هذا النموذج.

الحـــل :

1-الشكل المختزل للنموذج : بإجراء بعض التحويلات البسيطة على المعادلات الهيكلية للنموذج نحصل على الشكل المختزل التالي:

$$y_1 = \left(\frac{a_{11}}{1-b_{12}.b_{21}}\right).x_1 + \left(\frac{b_{12}.a_{22}}{1-b_{12}.b_{21}}\right).x_2$$

$$y_2 = \left(\frac{b_{21}.a_{11}}{1-b_{21}.b_{12}}\right).x_1 + \left(\frac{a_{22}}{1-b_{12}.b_{21}}\right).x_2$$

الشكل المبسط لهذا النموذج المختزل هو:

$$y_1 = v_1.x + v_2.x_2$$
$$y_2 = v_3.x + v_4.x_2$$

تقدير معاملات هذا النموذج يتم بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية. من أجل إيجاد قيم معاملات المعادلة المختزلة الأولى(v_1 , v_2) ، نستعمل المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى:

$$\Sigma Y_1.x_1 = v_1.\Sigma x^2{}_1 + v_2.\Sigma x_1.x_2$$
$$\Sigma y_1.x_2 = v_1.\Sigma x_1.x_2 + v_2.\Sigma x^2{}_2$$

بهدف تبسيط حل هذين المعادلتين، نعبر عن المتغيرات (y_i , x_i) من خلال انحرافاتهم عن وسطهم الحسابي، وتصبح المعطيات الأولية الخاصة بهذه المتغيرات كالتالي:

	y_1	y_2	x_1	x_2
	-3	0,6	-200	3
	-1	-0,4	-200	-1
	2	-0,2	0	-1
	-1	0,6	100	6
	3	-0,6	300	-7
Σ	0	0	0	0

باستعمال هذا الشكل من البيانات نحصل على قيم مجاميع المعادلتين الطبيعيتين كما يلي:

$$\Sigma y_1.x_1 = 1600\ ,\ \Sigma y_1.x_2 = -37\ ,\ \Sigma x^2{}_1 = 180000\ ,$$
$$\Sigma x_1.x_2 = -1900\ ,\ \Sigma x^2{}_2 = 96$$

بتعويض هذه القيم في المعادلتين الطبيعيتين السابقتين نحصل على الشكل التالي:

$$1600 = 180000.v_1 - 1900.v_2$$
$$-37 = -1900.v_1 + 96.v_2$$

بحل المعادلتين السابقتين نحصل على قيم معاملات المعادلات المختصرة المقدرة(v_2 , v_1): $v_2= -0,2648$ $v_1 = 0,00609$. أي أن المعادلة المختزلة الأولى تأخذ الشكل المقدر التالي:

$$\hat{y}_1 = 0,00609.x_1 - 0,2648.x_2$$

بنفس الطريقة نعد المعادلتين الطبيعيتين لحساب معاملات المعادلة المختزلة الثانية(v_4 , v_3):

$$\Sigma y_1.x_1 = v_3.\Sigma x^2_1 + v_4.\Sigma x_1.x_2$$
$$\Sigma y_2.x_2 = v_3.\Sigma x_1.x_2 + v_4.\Sigma x^2_2$$

باستخدام انحرافات قيم المتغيرات (x_i , y_2) عن وسطهم الحسابي نحصل على قيم المجاميع المطلوبة لحساب المعاملات المذكورة: $\Sigma y_2.x_1 = -160$, $\Sigma y_2.x_2 = 10,2$. ويصبح شكل المعادلتين الطبيعيتين السابقتين كالتالي:

$$-160 = 180000.v_3 - 1900.v_4$$
$$10,2 = -1900.v_3 + 96.v_4$$

بحل هذين المعادلتين نحصل على قيم v_4 , v_3 :

$$v_4 = 0,11207,\ v_3 = 0,00029$$

بناءا على هذه القيم تأخذ المعادلة المختزلة الثانية شكلها المقدر كما يلي: $\hat{y}_2 = 0,00029.x_1 + 0,11207.x_2$.

إذن الشكل المقدر لنموذج المعادلات المختزلة هو:

$$\hat{y}_1 = 0,00609.\ x_1 - 0,2648.x_2$$
$$\hat{y}_2 = 0,00029.\ x_1 + 0,11207.x_2$$

2- تحديد المعادلات الهيكلية للنموذج:

المعادلة الأولى: عدد المتغيرات الداخلية التي تحتوي عليها هذه المعادلة هي 2 (y_1 , y_1) ، وبالتالي : $N = 2$. عدد المتغيرات الخارجية التي يحتوي عليها النموذج والغير موجودة في هذه المعادلة هي1(x_2). أي أن : $D = 1$. يكون شرط التحديد في هذه الحالة هو: $N = D + 1 \leftarrow 2 = (1 + 1)$. فهذه المعادلة هي إذن محددة تماما.

المعادلة الثانية: عدد متغيراقما الداخلية 2 (y_2 , y_1) وبذلك تكون $N = 2$. عدد المتغيرات الخارجية الغير ممثلة فيها هي 1 (x_1) ، بمعنى : $D = 1$. شرط التحديد هو: $N = D + 1 \leftarrow (1+ 1 =2)$. المعادلة الهيكلية الثانية هي أيضا محددة تماما.

3- تقدير المعادلات الهيكلية للنموذج المعطى:

ما دامت المعادلتين الهيكليتين للنموذج محددتين تماما، فمن أجل تقديرهما نستعمل طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة. بمعنى حساب (تقدير) المعاملات الهيكلية يتم عن طريق المعاملات المقدرة للنموذج المختزل الذي سبق وأن حددناه في (1). لدينا من الشكل المختزل المقدر السابق:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 0,00609.x_1 - 0,2648.x_2 \\ x_2 = \dfrac{\hat{y}_2 - 0,00029 \ . x_1}{0,11207} \end{cases}$$

$$\hat{y}_1 = 0,00609.x - 0,2648.\left(\frac{\hat{y}_2 - 0,00029 \ . x_1}{0,1127} \right)$$

$$\hat{y}_1 = - 2,3629.\hat{y}_2 + 0,00678.x_1$$

ولدينا أيضا :

$$\begin{cases} \hat{y}_2 = 0,00029.x_1 + 0,11207.x_2 \\ x_1 = \dfrac{\hat{y}_1 + 0,2648 \; . x_2}{0,00609} \end{cases}$$

$$\hat{y}_2 = 0,00029.\left(\frac{\hat{y}_1 + 0,2648 \,.\, x_2}{0,00609}\right) + 0,11207.x_2 =$$

$$= 0,04762.y_1 + 0,12468.x_2$$

ويكون الشكل الهيكلي المقدر للنموذج المعطى هو:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = -\,2,3629.y_2 + 0,00678.x_1 \\ \hat{y}_2 = 0,04762.y_1 + 0,12468.x_2 \end{cases}$$

مثـــال 5:

لدينا نموذج المعادلات الآنية التالي:

دالة الاستهلاك: $c_t = a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.c_{t-1} + \varepsilon_1$

دالة الاستثمار: $I_t = a_2 + b_{21}.r_t + b_{22}.I_{t-1} + \varepsilon_2$

دالة السوق النقدية: $r_t = a_3 + b_{31}.y_t + b_{32}.M_t + \varepsilon_3$

متطابقة الدخل (دالة تعريفية): $y_t = c_t + I_t + G_t$

حيث :

c_t – الإنفاق على الاستهلاك في الفترة t

y_t – الدخل الوطني الإجمالي في الفترة t

I_t - الإنفاق على الاستثمار في الفترة t

r_t – معدل سعر الفائدة في الفترة t

M_t – كمية النقود المعروضة في الفترة t

G_t – الإنفاق الحكومي في الفترة t

c_{t-1} - الإنفاق الاستهلاكي في الفترة t_{-1}

I_{t-1} – الإنفاق على الاستثمار في الفترة t_{-1}

$\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \varepsilon_3$ – الأخطاء العشوائية.

المطلوب: بافتراض أن المعطيات الخاصة بتطور كل متغيرات هذا النموذج، في فترات زمنية معينة، متوفرة. اقترح طريقة لتقدير المعادلات الهيكلية لهذا النموذج.

الحـــل:

1- نتعرف على طابع تحديد المعادلات الهيكلية للنموذج: النموذج يحتوي على أربع متغيرات داخلية (c_t , I_t , y_t , r_t) وأربع متغيرات محددة سلفا (منها متغيرين خارجيين: M_t , G_t ، ومتغيرين داخليين ذو فترات إبطاء : c_{t-1} , I_{t-1}).

المعادلة الأولى: اختبار الشرط الضروري. هذه المعادلة تحتوي على متغيرين داخليين (c_t , y_t) ومتغير واحد محدد سلفا (c_{t-1}). لذلك فإن عدد المتغيرات الخارجية والمحددة سلفا الغير موجودة في هذه المعادلة هي 3 (M_t , G_t , I_{t-1}) فتكون في هذه الحالة $N = 2$ و $D = 3$ ويكون مقياس الشرط الضروري هو: $N < D + 1 \leftarrow (2 < 1 + 3)$.

فالمعادلة الأولى هي إذن محددة أكثر من اللازم.

اختبار الشرط الكافي للتحديد: مصفوفة معاملات متغيرات النموذج التي لم تظهر في هذه المعادلة هي:

$$A = \begin{vmatrix} I_t & r_t & I_{t-1} & M_t & G_t \\ -1 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

رتبة هذه المصفوفة =3 وهي تساوي عدد المتغيرات الداخلية للنموذج 1− . أي: (4 − 1 = 3). وأيضا محدد المصفوفة الجزئية المربعة (3×3) للمصفوفة A لا يساوي صفر.

$$\det A^* = \begin{vmatrix} -1 & b_{21} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

إذن فهذه المعادلة تستجيب لاختبار شرط التحديد الكافي، فهي إذن محددة أكثر مما ينبغي.

المعادلة الثانية: هذه المعادلة تحتوي على متغيرين داخليين (I_t , r_t) ولا تحتوي على ثلاث متغيرات محددة سلفا (M_t , G_t , c_{t-1}) . فيكون : ($D + 1 > N$ ← (2 <1 + 3 . فهذه المعادلة كسابقتها، هي محددة أكثر من اللازم.

اختبار الشرط الكافي للتحديد: مصفوفة معاملات متغيرات النموذج الغير ممثلة في هذه المعادلة هي:

$$A = \begin{array}{|ccccc|} c_t & y_t & c_{t-1} & M_t & G_t \\ -1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

رتبة هذه المصفوفة = 3 وهي تساوي عدد المتغيرات الداخلية للنموذج 1− . بمعنى (4 −1= 3). محدد المصفوفة الجزئية المربعة (3×3) للمصفوفة A أيضا لا يساوي الصفر.

$$.\ \operatorname{Det} A^* = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

هذه المعادلة بدورها تحقق الشرط الكافي للتحديد. فهي إذن محددة أكثر مما ينبغي.

المعادلة الثالثة:

اختبار الشرط الضروري. هذه المعادلة تحتوي على متغيرين داخليين (y_t , r_t)، ولا تحتوي على ثلاث متغيرات محددة سلفا (I_{t-1} , c_{t-1} , G_t) . مقياس التحديد في هذه الحالة هو: $D+1>N \leftarrow (3+1>2)$. المعادلة الثالثة محددة أكثر مما ينبغي.

اختبار الشرط الكافي: مصفوفة معاملات المتغيرات الغير موجودة في هذه المعادلة هي:

$$A = \begin{array}{|ccccc|} c_t & c_{t-1} & I_t & I_{t-1} & G_t \\ -1 & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

رتبة هذه المصفوفة = 3 وهي تساوي عدد المتغيرات الداخلية للنموذج 1- . أي : 4 -3 = 1 . محدد المصفوفة الجزئية المربعة (3×3) للمصفوفة A لا يساوي الصفر.

$$\text{Det } A^* = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

المعادلة الثالثة تحقق مقياس الشرط الكافي للتحديد، فهي إذن محددة أكثر من اللازم.

المعادلة الرابعة: هذه المعادلة هي معادلة تعريفية (متطابقة توازنية) معاملاتها معروفة، لا توجد هناك ضرورة لتحديدها.

2- تقدير المعادلات الهيكلية للنموذج:
نسجل أن كل معادلات النموذج المعطى محددة أكثر مما ينبغي. من أجل تقدير معاملاتها نستعمل طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين.

أ – تكوين الشكل المختزل للنموذج: بعد إجراء بعض التحويلات والتعويض نستطيع كتابة الشكل المبسط للنموذج المختزل كالتالي:

$$c_t = v_1 + v_2 . c_{t-1} + v_3 .I_{t-1} + v_4 .M_t + v_5 .G_t + \varepsilon_1$$
$$I_t = v_6 + v_7 . c_{t-1} + v_8 .I_{t-1} + v_9 .M_t + v_{10} .G_t + \varepsilon_2$$
$$y_t = v_{11} + v_{12} .c_{t-1} + v_{13} .I_{t-1} + v_{14} .M_t + v_{15} .G_t + \varepsilon_3$$
$$r_t = v_{16} + v_{17} .c_{t-1} + v_{18} .I_{t-1} + v_{19} .M_t + v_{20} .G_t + \varepsilon_4$$

بعد ذلك نجري تقدير معاملات كل معادلة من معادلات هذا النموذج المختزل باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية(لو توفرت المعطيات الأولية الفعلية الخاصة بمتغيرات هذا النموذج).

ب – تقدير النموذج الهيكلي: المتغيرات الداخلية الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلات الهيكلية الثلاثة هم (y_t , r_t).
نحسب القيم التقديرية (القيم النظرية) لهذه المتغيرات ($\hat{y}_t$, $\hat{r}_t$) بواسطة المعادلات المختزلة، نظرا لأن هذه المتغيرات توجد في طرفها الأيسر. أي :

$$\hat{y}_t = v_{11} + v_{12} .c_{t-1} + v_{13} .I_{t-1} + v_{14} .M_t + v_{15} .G_t$$
$$\hat{r}_t = v_{16} + v_{17} .c_{t-1} + v_{18} .I_{t-1} + v_{19} .M_t + v_{20} .G_t$$

وذلك بتعويض قيم (c_{t-1} , I_{t-1} , M_t , G_t) بقيمهم الفعلية لو كانت متوفرة في معطيات المسألة. بعد ذلك نعوض قيم المتغيرات الداخلية الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلات الهيكلية بقيمهم التقديرية التي نكون قد حصلنا عليها أعلاه ($\hat{y}_t , \hat{r}_t$) .

$$c_t = a_1 + b_{11}.\hat{y}_t + b_{12}.c_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.\check{r}_t + b_{22}.I_{t-1} + \varepsilon_2$$
$$r_t = a_3 + b_{31}.\hat{y}_t + b_{32}.M_t + \varepsilon_3$$

في الأخير نجري تقدير معاملات كل معادلة هيكلية من المعادلات السابقة باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية، فنحصل على قيم المعاملات الهيكلية: a_1 , b_{11} , b_{12} , a_2 , b_{21} , b_{22} , a_3 , b_{31}, b_{32} .

III – 3 – تمارين:

1- بين طبيعة تحديد معادلات النماذج الواردة في التمارين من 1- 19.
2-استخرج الشكل المختزل للنموذج وقدره.
3- أوضح طريقة حساب المعاملات الهيكلية لهذه النماذج.

تمـــرين 1:

ليكن النموذج التالي الخاص بالسوق النقدية :

$$\begin{cases} R_t = a_1 + b_{11}.M_t + b_{12}.y_t + \varepsilon_1 \\ y_t = a_2 + b_{21}.R_t + b_{22}.I_t + \varepsilon_2 \end{cases}$$

حيث:

R – معدل الفائدة ؛ I – الإنفاق على الاستهلاك

y – الناتج الداخلي الخام ؛ M – كمية النقود ؛ t – الفترة الجارية.

تمرين 2: لدينا النموذج الآني التالي.

$$\begin{cases} y_t = a_1 + b_{11}.y_{t-1} + b_{12}.I_t + \varepsilon_1 \\ I_t = a_2 + b_{21}.y_t + b_{22}.Q_t + \varepsilon_2 \\ c_t = a_3 + b_{31}.y_t + b_{32}.c_{t-1} + b_{33}.p_t + \varepsilon_3 \\ Q_t = a_4 + b_{41}.Q_{t-1} + b_{42}.R_t + \varepsilon_4 \end{cases}$$

حيث:

y – الدخل الوطني ؛ P – مقياس القوة الشرائية للعائلات ؛

I – الاستثمار الصافي ؛ c – الإنفاق على الاستهلاك الشخصي ؛

R – كمية الإنتاج الصناعي ؛ t – الفترة الحالية

Q – الربح الإجمالي للاقتصاد الوطني ؛ t_{-1} – الفترة السابقة

تمريـــن 3:

لتكن النموذج التالي الممثل لأحد حالات النموذج الكيتري المعدل:

$$c_t = a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.y_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$I = a_2 + b_{21}.y_t + b_{22}.y_{t-1} + \varepsilon_2$$
$$y_t = c_t + I_t + G_t$$

حيث:

C – الإنفاق الاستهلاكي ؛ G – الإنفاق الحكومي ؛

y – الدخل الوطني I – الإنفاق الاستثماري ؛ t – الفترة الحالية ؛

t-1 – الفترة السابقة لها .

تمريـــن 4:

ليكن نموذج المضاعف- المسرع التالي:

$$c_t = a_1 + b_{11}.R_t + b_{12}.c_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.(R_t - R_{t-1}) + \varepsilon_2$$
$$R_t = c_t + I_t$$

علما بأن:

c – الإنفاق الاستهلاكي ؛ R – الدخل ؛ I – الإنفاق على الاستثمار ؛ t – الفترة الجارية ؛

t-1 – الفترة السابقة.

تمـــرين 5:

لدينا النموذج الاقتصادي التالي:

$$c_t = a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.c_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.r_t + b_{22}.I_{t-1} + \varepsilon_2$$
$$r_t = a_3 + b_{31}.y_t + b_{32}.M_t + \varepsilon_3$$
$$y_t = c_t + I_t + G_t$$

حيث أن:

c- الإنفاق الاستهلاكي ؛ M- كمية النقود ؛ y- الناتج المحلي الخام ؛ G- الإنفاق الحكومي؛ I - الاستثمار؛ r - سعر الفائدة ؛ t - الفترة الحالية ؛ t-1 - الفترة السابقة لها.

تمرين 6:

في ما يلي نموذج الحماية المبسط لسلفاتور

$$M_t = a_1 + b_{12}.N_t + b_{13}.s_t + b_{14}.E_{t-1} + b_{15}.M_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$N_t = a_2 + b_{21}.M_t + b_{23}.s_t + b_{26}.y_t + \varepsilon_2$$
$$S_t = a_3 + b_{31}.M_t + b_{32}.N_t + b_{37}.x_t + \varepsilon_3$$

حيث: M- نسبة الصادرات في الناتج المحلي الخام ؛ N- العدد الإجمالي لطلبات الإعفاء من الضرائب الجمركية ؛ s - العدد الإجمالي لطلبات الإعفاء المقبولة ؛ E- متغير وهمي، يساوي"1" في السنوات التي يكون فيها سعر صرف الدولار في الأسواق العالمية مرتفع بصفة اصطناعية ، ويساوي"0" في السنوات الأخرى ؛ y- الناتج المحلي الخام ؛ X- قيمة صافي الصادرات ؛ t- الفترة الجارية ؛ t-1- الفترة السابقة لها.

تمريـــن 7:

ليكن النموذج الكيتري التالي:

$$C_t = a_1 + b_{12}.y_t + b_{13}.T_t + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.y_t + b24.k_{t-1} + \varepsilon_2$$

أين: c - الاستهلاك؛ I- الاستثمار؛ y- الدخل الوطني؛ T- الضرائب؛
k- مخزون رأس المال ؛ t- الفترة الجارية ؛ t_{-1}- الفترة السابقة.

تمريــــن 8:

لدينا النموذج الكلي التالي الخاص بإحدى حالات اقتصاد و.م.أ.

$$c_t = a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.c_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.y_t + b_{23}.r_t + \varepsilon_2$$
$$r_t = a_3 + b_{31}.y_t + b_{34}.M_t + b_{35}.r_{t-1} + \varepsilon_3$$
$$y_t = c_t + I_t + G_t$$

أين : c- حجم الاستهلاك ؛ y-الناتج .م.خ. ؛
I- الاستثمار ؛ r- سعر الفائدة ؛ M-كمية النقود ؛
G-الإنفاق الحكومي ؛ t- الفترة الحالية ؛ t_{-1}- الفترة السابقة.

تمريــــن 9: يعطى النموذج الكينزي التالي:

$$C_t = a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.y_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.y_t + \varepsilon_2$$
$$y_t = I_t + G_t + c_t$$

بحيث: c- كمية الاستهلاك ؛ I- قيمة الاستثمار ؛ y- الناتج م.خ. ؛
G-الإنفاق الحكومي ؛ t- الفترة الجارية ؛ t_{-1}- الفترة السابقة.

تمرين 10: يعطى نموذج السوق النقدية وسوق السلع كالتالي:

$$R_t = a_1 + b_{12}.y_t + b_{14}.M_t + \varepsilon_1$$
$$y_t = a_2 + b_{21}.R_t + b_{23}.I_t + b_{25}.G_t + \varepsilon_2$$
$$I_t = a_3 + b_{31}.R_t + \varepsilon_3$$

حيث: R-سعر الفائدة ؛ y- الناتج م.خ. ؛ M- كمية النقود ؛
I- الإنفاق على الاستثمار؛ G- الإنفاق الحكومي ؛ t- الفترة الزمنية الجارية.

تمريـــن 11:

من أجل توقع حجم الطلب على سلعتها، تقوم مؤسسة ما باستعمال النموذج التالي، الذي يمثل حالة النشاط الاقتصادي في المنطقة الموجودة فيها هذه المؤسسة.

$$Q_t = a_1 + b_{11}.y_t + \varepsilon_1$$
$$c_t = a_2 + b_{21}.y_t + \varepsilon_2$$
$$I_t = a_3 + b_{32}.(y_{t-1} - k_{t-1}) + \varepsilon_3$$
$$y_t = c_t + I_t$$

حيث : Q- قيمة المبيعات في الفترة؛ y- إجمالي القيمة المضافة؛ c- حجم الاستهلاك ؛ I- قيمة الاستثمار ؛ k- مخزون رأس المال ؛ t- الفترة الجارية ؛ t_{-1}- الفترة السابقة.

تمريـــن 12:

يعطى النموذج الكينزي التالي.

$$c_t = a_1 + b_{11}.y_t + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{21}.y_t + b_{22}.y_{t-1} + \varepsilon_2$$
$$y_t = c_t + I_t + G_t$$

حيث : c- الإنفاق الاستهلاكي ؛ y- الدخل الوطني ؛ I- الإنفاق على الاستثمار ؛ G- الإنفاق الحكومي ؛ t- الفترة الجارية ؛ $t-1$- الفترة السابقة.

تمرين 13:

ليكن النموذج الاقتصادي الكلي التالي:

$$c_t = a_1 + b_{11}.D_t + \varepsilon_1$$
$$I_t = a_2 + b_{22}.y_t + b_{23}.y_{t-1} + \varepsilon_2$$
$$y_t = D_t + T_t$$
$$D_t = c_t + I_t + G_t$$

أين : c– الإنفاق على الاستهلاك ؛ y– الناتج الوطني الصافي ؛
D– الدخل الوطني الصافي ؛ I– الإنفاق الاستثماري؛
T– الضرائب غير المباشرة ؛ G– الإنفاق الحكومي ؛

تمريــــن 14:

لدينا الشكل الهيكلي التالي لنموذج اقتصادي ما:

$$\begin{cases} c_t = b_1 + b_2.s_t + b^3.p_t \\ S_t = a_1 + a_2.R_t + a_3.R_{t-1} \\ R_t = s_t + p_t \end{cases}$$

حيث : c_t– الاستهلاك الشخصي في الفترة t ؛ s_t– قيمة الأجور في الفترة t ؛ p_t– قيمة الأرباح في الفترة t ؛ R_t–الدخل الإجمالي في الفترة t ؛ R_{t-1}– الدخل الإجمالي في الفترة t-1 ؛ t– الفترة الجارية ؛ t-1– الفترة السابقة.

تمرين 15:

الطلب والعرض في سوق سلعة ما ممثلة بالنموذج التالي.

$$Q_1 = a_1 + b_1.p + \varepsilon_1$$
$$Q_2 = a_2 + b_2.p + \varepsilon_2$$
$$Q_1 = Q_2$$

أين: Q_1– الكمية المطلوبة من السلعة؛ Q_2–الكمية المعروضة من السلعة؛ p– ثمن السلعة.

تمرين 16:

ليكن النموذج الاقتصادي الافتراضي التالي.

$$\begin{cases} c_t = a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.J_t + \varepsilon_1 \\ J_t = a_2 + b_{21}.y_{t-1} + \varepsilon_2 \\ T_t = a_3 + b_{31}.y_t + \varepsilon_3 \\ y_t = c_t + J_t + G_t \end{cases}$$

أين: c− القيمة الإجمالية للاستهلاك في الفترة t ؛ y− إجمالي الدخل في الفترة؛ J− الإنفاق على الاستثمار في الفترة؛ T− قيمة مداخيل الضرائب في الفترة؛ G− الإنفاق الحكومي.

تمرين 17:

ليكن النموذج الكيتري التالي الخاص بالعرض والطلب.

$$Q^s_t = a_1 + a_2.p_t + a_3.p_{t-1} + \varepsilon_1$$
$$Q^d_t = b_1 + b_2.p_t + b_3.y_t + \varepsilon_2$$
$$Q^s_t = Q^d_t$$

بحيث: Q^s_t−الطلب على السلعة في الفترة ؛ Q^d_t− العرض من السلعة في الفترة ؛ p_t− ثمن السلعــة في الفترة؛ y_t− الدخل في الفتــرة ؛ p_{t-1}− ثمن السلعة في الفترة t-1 .

تمــرين18:

لدينا النموذج التالي الخاص بالعرض والطلب على النقود.

$$R_t = a_1 + b_{11}.M_t + b_{12}.y_t + \varepsilon_1$$
$$y_t = a_2 + b_{21}.R_t + \varepsilon_2$$

حيث: R− سعر الفائدة في الفترة؛ y− الناتج م.خ. ؛ M−كمية النقود في الفترة t .

تمــرين 19:

ليكن النموذج التالي المعبر عن حالة السوق النقدية.

$$R_t = a_1 + b_{11}.M_t + b_{12}.y_t + \varepsilon_1$$
$$y_t = a_2 + b_{21}.R_t + b_{22}.I_t + \varepsilon_2$$
$$I_t = a_3 + b_{33}.R_t + \varepsilon_3$$

مع العلم أن: R−سعر الفائدة ؛ y−الناتج م.خ. ؛ M−كمية النقود ؛ I− الإنفاق على الاستثمار

تمـــرين 20:

ليكن النموذج الهيكلي الآني التالي.

$$\begin{cases} S_t = a_1 + b_{11}.D_t + b_{12}.M_t + b_{13}.Un_t + \varepsilon_1 \\ c_t = a_2 + b_{21}.D + b_{22}.s + b_{23}.Un_t + \varepsilon_2 \\ D_t = a_3 + b_{31}.s_t + b_{32}.c_{t-1} + b_{33}.I_t + \varepsilon_3 \end{cases}$$

مع العلم أن: s_t- قيمة الأجور في الفترة t ؛ D_t- صافي الدخل الوطني في الفترة t ؛ M_t-كمية النقود في الفترة t ؛ c_t-الإنفاق على الاستهلاك في الفترة t ؛ c_{t-1}-الإنفاق الاستهلاكي في الفترة t-1؛ Un_t- مستوى البطالة في الفترة t ؛ Un_{t-1}- مستوى البطالة في الفترة؛ I_t- الإنفاق الاستثماري في الفترة t .

المطلـــوب:

1- ما هي الطرق التي يجب استعمالها من أجل تقدير معاملات المعادلات الهيكلية للنموذج.

2- استخرج الشكل المختزل لهذا النموذج.

3- اشرح باختصار طريقة حساب معاملات المعادلة الهيكلية الأولى والثانية.

تمـــرين 21:

نعرض أدناه نتائج حساب معاملات نموذج اقتصادي ما.

الشكل الهيكلي المقدر للنموذج:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = -4 + \ldots\ldots y_2 - 9{,}4.x_2 \\ \hat{y}_2 = 12{,}83 - 2{,}67.y_1 + ..\ x_1 \\ \hat{y}_3 = 1{,}36 - 1{,}76.y_1 + 0{,}828.y_2 \end{cases}$$

الشكل المختزل المقدر للنموذج:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 2 + 4.x_1 - 3.x_2 \\ \hat{y}_2 = 7,5 + 5.x_1 + 8.x_2 \\ \hat{y}_3 = 4 + \ldots x_1 + .. x_2 \end{cases}$$

المطلــوب:

1- ما هي الطرق التي استعملت في نظرك لحساب معاملات الشكل المختصر والهيكلي للنموذج أعلاه.

2- أكمل حساب المعاملات المتبقية (مكان النقط).

تمــرين 22:

النموذج الاقتصادي التالي يتكون من أربع معادلات، أربع متغيرات داخلية(y_i) وثلاثة متغيرات خارجية (x_i). عرضت أدناه مصفوفة معاملات المتغيرات في الشكل الهيكلي للنموذج.

المعادلة	y_1	y_2	y_3	y_4	x_1	x_2	x_3
الأولى	-1	0	b_{13}	b_{14}	c_{11}	0	0
الثانية	0	-1	B	0	c_{21}	0	0
الثالثة	0	b_{32}	-1	0	c_{31}	0	c_{33}
الرابعة	b_{41}	b_{42}	b_{43}	-1	0	c_{42}	c_{43}

المطلوب:

تحقيق اختبار الشرط الضروري والشرط الكافي لتحديد المعادلات الهيكلية السابقة وتوضيح طبيعة تحديد كل منها.

تمـــرين 23:

من أجل دراسة العلاقة بين التضخم وربحية الأسهم العادية يستعمل نموذج الانحدار التالي:

$$\begin{cases} Rb_t = a_1 + b_{11}.Rs_t + b_{12}.Rb_{t-1} + b_{13}.l_t + b_{14}.y_t + b_{15}.N_t + b_{16}.I_t + \varepsilon_1 \\ Rs_t = a_2 + b_{21}.Rb_t + b_{22}.Rb_{t-1} + b_{23}.l_t + b_{24}.y_t + b_{25}.N_t + b_{26}.E_t + \varepsilon_2 \end{cases}$$

مع العلم أن : Rb– دخل السندات ؛ Rs– دخل الأسهم العادية ؛ L– الدخل النقدي للفرد ؛ y – الدخل الإجمالي للفرد (كل مصادر الدخل) ؛ N– متغير يعبر عن الإصدار الجديد للأوراق المالية في فترة زمنية معينة؛ E- الدخل المتوقع للأسهم في نهاية الفترة؛ I- المستوى المتوقع للتضخم؛ t- الفترة الجارية؛ t-1– الفترة السابقة. المتغيرات (Rs , Rb) هي متغيرات داخلية.

المطلوب:

1– استخرج الشكل المختزل لهذا النموذج.

2– ما هي في رأيك الطرق التي يجب استعمالها من أجل تقدير المعاملات الهيكلية لهذا النموذج ولماذا.

تمرين 24:

نعرض النموذج الكينزي التالي.

$$\begin{aligned} c_t &= a_1 + b_{11}.y_t + b_{12}.T_t + \varepsilon_1 \\ I_t &= a_2 + b_{21}.y_{t-1} + \varepsilon_2 \\ T_t &= a_3 + b_{31}.y_t + \varepsilon_3 \\ y_t &= c_t + I_t + G_t \end{aligned}$$

علما بأن: c– مجمل الإنفاق على الاستهلاك ؛ y– الدخل الإجمالي في الفترة ؛ I– الإنفاق الاستثماري ؛T- قيمة الضرائب المحصلة في

الفترة t ؛ G- الإنفاق الحكومي في الفترة t ؛ y_{t-1}- الدخل الإجمالي في الفترة t-1 . في هذا النموذج المتغيرات (y , T , I , c) هي متغيرات داخلية.

المطلوب:

1- تحقيق اختباري شرط التحديد (الضروري والكافي). ثم إيضاح طبيعة تحديد المعادلات الهيكلية السابقة.
2- ما هي الطرق التي يتعين استعمالها لتقدير معاملات هذه المعادلات.
3- كون الشكل المختزل لهذا النموذج.
4- نفترض أننا أضفنا إلى الطرف الأيمن لمعادلة الاستثمار(المعادلة الثانية) متغير خارجي آخر (سعر الفائدة) . كيف يؤثر هذا التغيير على طبيعة تحديد معادلات النموذج المعطى وعلى حساب معاملاته.

تمـــرين 25:

نريد دراسة علاقة حجم الاستهلاك (c) بمقدار الدخل (y).
1- ما هي الطريقة التي يجب استعمالها من أجل تقدير معاملات دالة الاستهلاك، إذا كان نموذجها الاقتصادي كالتالي: نموذج A : دالة الاستهلاك : $c = a + b.y + \varepsilon$

نموذج B : دالة الاستهلاك: $c = a + b.y + \varepsilon$ ؛ متطابقة الدخل: $y = c + I$
نموذج c : دالة الاستهلاك : $c = a + b.y + \varepsilon$ ؛ متطابقة الدخل: $y = c + I + G$.
حيث أن: I- الإنفاق على الاستثمار؛ G- الإنفاق الحكومي؛
y, c - متغيرات داخلية.

2- نفترض أن المعطيات الفعلية الخاصة بتطور متغيرات النماذج الثلاثة كانت متوفرة وأنه باستخدام هذه المعطيات تم حساب معاملات التحديد للنماذج الثلاثة. أي من هذه المعاملات تكون قيمته أكبر ولماذا.

تمرين 26:

ليكن النموذج الاقتصادي التالي.

$$y_1 = a_1 + b_{12}.y_2 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = a_2 + b_{21}.y_1 + c_{21}.x_1 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = y_2 + x_2$$

الشكل المختزل المقدر لهذا النموذج هو:

$$y_1 = -1,25 + 22.x_1 + 0,67.x_2 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = 2 - 4.x_1 + 10x_2 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = -30 + 12x_1 + 8x_2 + \varepsilon_3$$

ومعلوم أيضا المعطيات الأولية التالية:

N :	1	2	3	4	5	6
y_1 :	3	2	4	1	5	3
x_1 :	2	3	5	6	10	8
x_2 :	4	7	3	6	5	5

المطلــوب:

احسب معاملات المعادلتين الهيكليتين الأولى والثانية إذا كان ذلك ممكنا.

تمــرين 27:

إذا كان لدينا النموذج الآني التالي:

(متطابقة الدخل): $y_t = c_t + I_t + G_t$

(دالة الاستهلاك): $c_t = 0,09 + 0,43.Yd_{t-1} + 0,23.M_t + \varepsilon_1$

(دالة الاستثمار): $I_t = 0,08 + 0,4.(y_{t-1} + y_{t-2})\ 0,48.z_t + 0,1.t + \varepsilon_2$

(معادلة الإنفاق الحكومي): $G_t = 0,13 + 0,67.G_{t-1} + \varepsilon_3$

علما بأن: y_t- الناتج م.ج. ؛ c_t- الإنفـــاق على الاستهـــلاك ؛ I_t- الإنفاق الداخلي على الاستثمار؛ G_t- الإنفاق الحكومي زائد صافي الاستثمار الخارجي؛ Yd_{t-1}- الدخل الصافي (خارج الضرائب) في الفترة t-1 ؛ M_t- كمية النقود المتاحة؛ z_t-إجمالي الدخل الناتج عن الملكيـــة؛ y_{t-1}-الناتج م.ج. في الفترة t-1 ؛

y_{t-2}- الناتج م.ج. في الفترة t-2؛ G_{t-1}- الإنفاق الحكومي + الاستثمار الخارجي في الفترة t-1 ؛ t- الفترة الجاريـــة؛ G , I , c , y- هي متغيرات داخلية.

المطلوب:

1- نفترض أنه كان معلوما ما يلي:

المتغير	القيمة المتوسطة	الانحراف المعياري
Yd_{t-1}	2500	500
M_t	3000	200

أي هذين المتغيرين يؤثر أكثر على الإنفاق على الاستهلاك (c_t) وبكم. ($\sigma_{ct} = 430$) .

2- معاملات كل معادلة من النموذج الهيكلي السابق استخرجت بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية. بين كيف استعملت هذه الطريقة من أجل الحصول على هذه المعاملات.

تمرين 28:

في ما يلي نورد نموذج المعادلات الآنية التالي:

$$y_1 = a_1 + b_{11}.x_1 + b_{12}.x_2 + c_{12}.y_2 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = a_2 + b_{22}.x_2 + b_{23}.x_3 + c_{21}.y_1 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = a_3 + b_{31}.x_1 + b_{33}.x_3 + \varepsilon_3$$

الشكل المختزل المقدر لهذا النموذج هو:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 6 + 8x_1 + 10x_2 + 4x_3 + \varepsilon_1 \\ \hat{y}_2 = 16 - 12x_1 - 70x_2 + 8x_3 + \varepsilon_2 \\ \hat{y}_3 = 10 - 5x_1 - 22x_2 + 5x_3 + \varepsilon_3 \end{cases}$$

المطلـــوب:

استخرج الشكل المقدر للنموذج الهيكلي المعطى.

تمـــرين 29:

ليكن النموذج الآني التالي:

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + b_{12}.y_2 + b_{13}.y_3 + c_{12}.x_2 + \varepsilon_1 \\ y_2 = a_2 + b_{21}.y_1 + b_{23}.y_3 + c_{21}.x_1 + \varepsilon_2 \\ y_3 = a_3 + b_{34}.y_4 + c_{32}.x_2 + c_{33}.x_3 + \varepsilon_3 \\ y_4 = a_4 + b_{42}.y_2 + b_{43}.y_3 + c_{43}.x_3 + \varepsilon_4 \end{cases}$$

الشكل المختزل المقدر لهذا النموذج هو:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = 2 + 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + u_1 \\ \hat{y}_2 = 12 - 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + u_2 \\ \hat{y}_1 = 8 + 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + u_3 \\ \hat{y} = 4 - 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + u_4 \end{cases}$$

المطلـــوب:

1- ما هي المعاملات الهيكلية للنموذج التي نستطيع استخراجها بالاعتماد على المعاملات المقدرة للشكل المختزل. 2- ماذا يتغير في الجواب على هذا السؤال إذا أصبحت $c_{21} = 0$.

3- استخرج المعاملات الهيكلية للمعادلات الأخرى.

تمـــرين 30: لدينا النموذج الهيكلي للمعادلات الآنية التالي:

$$y_1 = a_1 + b_2 .y_2 + c_1.x_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = a_2 + b_1.y_1 + c_2 .x_2 + \varepsilon_2$$

المطلــوب:

حدد المعاملات الهيكلية للنموذج إذا علمت أن:

$$2600\Sigma y_1.x_2 = 4350\ ;\ \Sigma y_1 = 350\ ;\ \Sigma y_2 = 25;\ \Sigma x_1 = 750\ ;$$
$$;\ \Sigma y_1.x_1 = 2600\ ;\ \Sigma x^2_1 = 1200\ ;\ \Sigma x^2_2 = \ \Sigma x_2 = 350$$
$$.\ 1800\ ,\ n = 30\ ,\ \Sigma x._1x_2 = 1500$$

وأيضا : $\hat{y}_2 = 2x_1 + 3x_2$

تمرين 31: ليكن النموذج الافتراضي التالي.

$$y_1 = b_{12}.y_2 + a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2$$
$$y_2 = b_{21}.y_1 + b_{23}.y_3 + a_{22}.x_2$$
$$y_3 = b_{32}.y_2 + a_{31}.x_1 + a_{33}.x_3$$

الشكل المختزل المقدر لهذا النموذج هو:

$$\hat{y}_1 = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$$
$$\hat{y}_2 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3$$
$$\hat{y}_3 = -5x_1 + 6x_2 + 5x_3$$

المطلوب:

1- إجراء اختبار التحديد للمعادلات الهيكلية للنموذج ووضح طبيعة تحديد كل منها.

2- احسب المعاملات الهيكلية لكل من هذه المعادلات.

تمــرين 32: لتكن لدينا البيانات الافتراضية التالية:

الفترة الزمنية	معدل النمو					نسبة البطالة
t	الأجور y_1	الأسعار y_2	الدخل y_3	أسعار الاستيراد x_2	السكان القادرين على العمل x_3	$x_1(\%)$
1	2	6	10	2	1	1
2	3	7	12	3	2	2
3	4	8	11	1	5	3
4	5	5	15	4	3	2
5	6	4	14	2	3	3
6	7	9	16	2	4	4
7	8	10	18	3	4	5

المطلــوب:

باستعمال البيانات المعطاة في الجدول، قدر معاملات النموذج الهيكلي التالي:

$$y_1 = b_{12}.y_2 + a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = b_{21}.y_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = b_{31}.y_1 + a_{33}.x_3 + \varepsilon_3$$

تمــرين 33:

ليكن النموذج التالي الخاص بالطلب والعرض على سلعة ما.

$$Q^s_t = a_1 + a_2.p_t + a_3.R_t + \varepsilon_1$$
$$Q^d_t = b_1 + b_2.p_t + b_3.y_t + b_4.y_{t-1} + \varepsilon_2$$
$$Q^s_t = Q^d_t = Q_t$$

بحيث أن: Q^s_t- العرض في الفترة t ؛ Q^d_t- الطلب في الفترة t ؛ p_t- ثمن السلعة في الفترة t ؛ R_t-سعر الفائدة في الفترة t ؛ y_t- الدخل في الفترة ؛ y_{t-1}- الدخل في الفترة . نشير إلى أنه في هذا النموذج، الثمن، الطلب والعرض يحددون في نفس الوقت. لذلك فإن المتغيرات الخاصة بهم تعتبر متغيرات داخلية. الجدول التالي يعطي البيانات الخاصة بتطور كل المتغيرات الواردة في النموذج الهيكلي أعلاه.

p_t	y_{t-1}	y_t	R_t	Q_t	السنة
6	13	15	3	40	1
6	15	15	3	45	2
5	15	18	2	40	3
8	18	20	3,5	50	4
5	20	18	2,5	35	5
9	18	22	4	45	6
10	22	21	3,5	50	7
9	21	22	3,5	45	8
58	142	151	25	350	Σ

إذا كان الشكل المختزل المقدر للنموذج الهيكلي السابق هو:

$$Q_t = 24,473 + 5,2374.R_t + 0,1652.y_t - 0,0116.y_{t-1}$$
$$P_t = - 4,4268 + 1,9746.R_t + 0,1915.y_t + 0,1065.y_{t-1}$$

المطلوب:

1- إجراء تحديد النموذج الهيكلي المعطى.

2- تقدير معاملات انحدار المعادلات الهيكلية لهذا النموذج.

تمريـــن 34:

باستعمال المعطيات الخاصة بالفترة 1990-1999 (بالوحدات النقدية)، الواردة في الجدول أدناه، تم تكوين دالة الاستهلاك.

	1990	91	92	93	94	95	96	97	98	99
الاستهلاك الإجمالي	1900	1980	2000	1800	2000	2100	2200	2100	2050	2100
حجم الاستثمار	100	200	300	200	100	200	300	200	150	300
الدخل الإجمالي	2000	2180	2300	2000	2100	2300	2500	2300	2200	2400

المطلوب:

1- كون دالة الاستهلاك باستعمال نموذج كينز لتكوين الدخل.

2- احسب الشكل المختزل للنموذج وأعطي تفسيرا لنتائجه.

الفصل الرابع

تكوين و تحليل السلاسل الزمنية

IV-1- تذكير بأهم القواعد النظرية

IV - 1 -1- نمذجة السلاسل الزمنية

أ : العناصر الأساسية للسلسلة الزمنية:

النموذج القياسي يمكن تكوينه بالاعتماد على نوعين من المعطيات الأولية:

- معطيات خاصة بمجموعة من الظواهر أو المؤشرات المختلفة في فترة (مدة) زمنية معينة.
- معطيات خاصة بظاهرة (مؤشر) واحد خلال سلسلة من الفترات الزمنية المتتالية .

النماذج المكونة بالاعتماد على النوع الثاني من المعطيات تسمى بنماذج السلاسل الزمنية.

السلسلة الزمنية هي: مجموعة من القيم الخاصة بمؤشر ما مأخوذة خلال فترات زمنية متتالية وهي تعكس تطور ذلك المؤشر عبر الزمن. كل قيمة (حد) (y_t) من حدود السلسلة الزمنية يتشكل نتيجة لتفاعل عدد كبير من العوامل المؤثرة في الظاهرة المدروسة والتي يمكن اصطلاحا تقسيمها إلى أربع مجموعات:

1 — العوامل التي يؤدي تفاعلها إلى تكوين الاتجاه العام لمسار تطور السلسلة.

2 — العوامل التي تنشأ عنها التقلبات الموسمية في السلسلة.

3 — العوامل التي تؤدي إلى تكوين التقلبات الدورية .

4 — العوامل ذات التأثير العشوائي على قيم السلسلة.

إن أغلب السلاسل الزمنية للمؤشرات الاقتصادية لها اتجاه عام يعكس التأثير طويل المدى لمجموعة من العوامل على ديناميكية هذه المؤشرات، مما يحدد اتجاهها العام المتزايد أو المتناقص بغض النظر عن جميع الانحرافات والتقلبات الأخرى.

من جهة أخرى فإن تطور هذه المؤشرات عبر الزمن يمكن أن يتميز بتقلبات دورية أو موسمية. ذلك لأن طبيعة النشاط لكثير من القطاعات الاقتصادية تتوقف على تأثير الفصول السنوية خلال كل سنة أو تأثير الأشهر خلال الفصول (مثل إنتاج بعض المواد الفلاحية الذي يرتفع في الصيف وينخفض في الشتاء، استهلاك المشروبات الغازية، نشاط الخدمات السياحية، استهلاك الطاقة الكهربائية ،......الخ).

عندما تتوفر عينات إحصائية كبيرة لفترات زمنية طويلة يمكن إظهار التقلبات الدورية، المرتبطة بالديناميكية العامة لنشاط السوق وبالمرحلة التي يوجد فيها اقتصاد بلد ما من الدورة الاقتصادية العامة.

بالإضافة إلى الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والدورية، فإن السلاسل الزمنية عادة ما تحتوي على بعض التقلبات العشوائية التي تنتج عادة عن التأثير المنعزل أو العرضي لبعض العوامل (مثل الإضرابات، الجفاف، الفيضانات، الأوبئة ،.......الخ).

إن التطور الفعلي للسلاسل الزمنية لا يكون بالضرورة في أحد الأشكال المشار إليها أعلاه بل عادة ما يكون يحتوي على مكونات كل هذه الأشكال. كل قيمة أو حد من حدود السلسلة هو نتاج التأثير طويل المدى، التقلبات الموسمية، الدورية والمكونات العشوائية مع بعض.

بصفة عامة القيم الفعلية لأي سلسلة زمنية يمكن تصورها وتقديمها كمجموع أو جداء لمكونات الاتجاه العام، الموسمي، الدوري والعشوائي. النموذج الذي تكون فيه السلسلة الزمنية في شكل مجموع للمكونات السابقة يسمى بالنموذج الجمعي للسلسلة الزمنية، أما النموذج الذي تكون فيه المكونات المشار إليها سابقا في شكل جداء فيسمى بالنموذج الجدائي للسلسلة الزمنية.

إن الهدف الأساسي لدراسة وتحليل السلاسل الزمنية هو توضيح وتحديد المكونات الهيكلية للسلسلة الزمنية (الاتجاه العام، التقلبات الموسمية، الدورية والعشوائية)، تقدير وقياس نموذج الانحدار الذي تتطور وفقه هذه السلسلة عبر الزمن وكذلك استخدام المعلومات المحصل عليها من أجل إجراء الاستطلاع والحصول على قيم تقديرية للسلسلة في المستقبل.

ب : الارتباط الذاتي لقيم السلسلة الزمنية

عند وجود اتجاه عام للسلسلة المدروسة واحتوائها على تقلبات دورية وموسمية، فإن كل قيمة من القيم اللاحقة للسلسلة توقف على القيم السابقة لها. إن العلاقة الارتباطية بين كل حدين متتالين من حدود أي سلسلة زمنية تسمى بالارتباط الذاتي لقيم أو حدود هذه السلسلة.

يمكن قياس الارتباط الذاتي بواسطة معامل الارتباط الخطي البسيط بين القيم الابتدائية للسلسلة الزمنية (y_t) وقيم نفس هذه السلسلة للفترات السابقة لها $(y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots)$.

من إحدى العلاقات التطبيقية المعروفة لحساب معامل الارتباط الخطي البسيط هي:

$$r_{xy}=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x}).(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2.\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$

في مكان قيم المتغير(x) نحل قيم السلسلة y_t $(y_n, ..., y_3, y_2)$.

وفي مكان قيم المتغير (y) نحل قيم السلسلة y_{t-1} $(y_{n-1} ,...., y_2 , y_1)$.

في هذه الحالة العبارة السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$r_1=\frac{\Sigma(y_t-\bar{y}_1).(y_{t-1}-\bar{y}_2)}{\sqrt{\Sigma(y_t-\bar{y}_1)^2.\Sigma(y_{t-1}-\bar{y}_2)^2}}$$

حيث أن:

$$\bar{y}_2=\frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1} \quad , \quad \bar{y}_1=\frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1}$$

قيمة (r_1) تسمى بقيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لحدود السلسلة، ذلك لأنه يقيس العلاقة بين كل قيمتين أو حدين متجاورين للسلسلة (y_t) و (y_{t-1}). بمعنى بفترة إبطاء تساوي واحد فقط.

بنفس المنهج يمكن تحديد وقياس معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الثانية وأكثر. فمثلا معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الثانية يعكس متانة العلاقة بين قيم السلسلة (y_t) و(y_{t-2}) أي بفترة إبطاء تساوي 2.

يحسب معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الثانية من العلاقة التالية :

$$r_2=\frac{\Sigma(y_t-\bar{y}_3).(y_{t-2}-\bar{y}_4)}{\sqrt{\Sigma(y_t-\bar{y}_3)^2.\Sigma(y_{t-2}-\bar{y}_4)^2}}$$

حيث أن :

$$\bar{y}_3=\frac{\sum_{t=3}^{n} y_t}{n-2} \quad و \quad \bar{y}_4=\frac{\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}}{n-2}$$

عدد الفترات الزمنية التي يحسب فيها معامل الارتباط الذاتي تسمى بفترة الإبطاء. كلما زادت فترة الإبطاء كلما انخفض عدد أزواج قيم السلسلة التي تستعمل في حساب معامل الارتباط الذاتي. من أجل أن تكون قيمة معامل الارتباط الذاتي ذات مصداقية إحصائية يجب أن لا تتعدى فترة الإبطاء القصوى n/4 . نشير في هذا المقام إلى خاصية أساسية لمعامل الارتباط الذاتي:

يحسب معامل الارتباط الذاتي على غرار معامل الارتباط الخطي البسيط. لذلك فهو يعكس متانة العلاقة الخطية فقط بين القيمتين الحالية والسابقة للسلسلة الزمنية. من هنا فإن قيمة معامل الارتباط الذاتي تمكننا من الحكم على وجود اتجاه عام خطي أو قريب من الخطي. أما في السلاسل الزمنية ذات الاتجاه العام غير الخطي (القطع المكافئ، الأسي أو غيره) فإن معامل الارتباط الذاتي للقيم الأولية للسلسلة الزمنية يكون قريبا من الصفر. إن القيم المتتالية لمعامل الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى، الثانية وأكثر لسلسلة ما تسمى بدالة الارتباط الذاتي للسلسلة الزمنية. المنحنى الذي يوضح علاقة قيم هذه الدالة بقيم فترات الإبطاء يسمى بمنحنى الارتباط الذاتي. تحليل دالة الارتباط الذاتي ومنحنى الارتباط الذاتي يمكن من تحديد فترة الإبطاء التي يكون عندها الارتباط الذاتي أعلى ما يمكن. بمعنى آخر يمكن معرفة فترة الإبطاء التي تكون عندها العلاقة بين القيم الحالية والسابقة للسلسلة أعلى ما يمكن. لذلك فإن تحليل دالة الارتباط الذاتي ومنحنى الارتباط الذاتي يسمح بإظهار هيكل السلسلة الزمنية (الاتجاه العام، التغير الموسمي، الدوري،.....الخ).

إذا كانت قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى هي الأكبر فإن هذا يدل على أن للسلسلة اتجاه عام خطي فقط. إذا كانت القيمة الكبيرة هي قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة(τ)، فإن السلسلة في هذه الحالة تحتوي على تغيرات موسمية عددها(τ) فترة زمنية.

أما إذا كانت قيم معاملات الارتباط الذاتي من المراتب المختلفة كلها ضعيفة فهذا يدل إما على أن السلسلة لا تحتوي على اتجاه عام ولا على تغيرات موسمية أو تدل على أن هذه السلسلة تحتوي على اتجاه عام قوي غير خطي.

ج – نمذجة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية ($\hat{T}$) :

إن مسألة إيجاد نموذج الاتجاه العام لمسار السلسلة الزمنية يتمثل في تكوين نموذج الانحدار البسيط الذي يعكس علاقة قيم السلسلة (y_t) بالزمن(t) ، هذه الطريقة تسمى أيضا بالتعديل التحليلي للسلسلة الزمنية أو إيجاد الدالة التحليلية لها.

بما أن تطور قيم الظاهرة المدروسة عبر الزمن يمكن أن يأخذ عدة أشكال فإنه من اجل التعبير الكمي عن هذه العلاقة يمكن استعمال أشكال متعددة من الدوال. منها على الخصوص:

- الدالة الخطية : $y_t = a + b.t + \varepsilon_t$
- دالة القطع الزائد : $y_t = a + \frac{b}{t} + \varepsilon_t$
- الدالة الأسية : $y_t = a \,.\, t^b + \varepsilon$
- الدالة من الشكل : $y_t = a \,.\, b^t + \varepsilon$
- أو من الشكل : $y_t = e^{a+bt} + \varepsilon$

أو غيرها ......

معاملات كل من الدوال المشار إليها أعلاه يمكن تقديها باستعمال طريقة المربعات الصغرى باعتبار الزمن (t) المتغير المستقل والقيم الفعلية للسلسلة (y_t) المتغير التابع. بالنسبة للدوال غير الخطية فإنه يجب تحويلها إلى شكلها الخطي تماما كما رأينا بالنسبة لنماذج الانحدار الغير خطية.

من أجل اختيار نوع الدالة التحليلية (نموذج الانحدار) الذي يمثل السلسلة المدروسة أحسن تمثيل يجب أولا تحديد شكل الاتجاه العام لتطور قيم السلسلة عبر الزمن. حتى نتمكن من تحديد شكل الاتجاه العام نلجأ إلى التحليل الاقتصادي للظاهرة المدروسة أو إلى رسم الأزواج المتقابلة لــ (t) و(y_t) على محورين وتحليل طبيعة المنحنى الناتج عن ذلك. من أجل تحقيق هذه المهمة يمكن اللجوء أيضا إلى استعمال معاملات الارتباط الذاتي لقيم السلسلة. شكل الاتجاه العام يمكن تحديده من خلال مقارنة معاملات الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى المحسوبة للشكل الخطي والغير خطي لعلاقة قيم السلسلة بالزمن.

إذا كان الاتجاه العام للسلسلة خطي، فإن قيمها المتجاورة (y_t) و(y_{t-1}) تكون ذات علاقة ارتباطية قوية.

في هذه الحالة قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لقيم السلسلة تكون كبيرة. أما إذا كان الاتجاه العام للسلسلة غير خطي، فإن قيمة معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى للقيمة اللوغاريتمية لحدود السلسلة (بعد تحويل دالتها التحليلية من شكلها غير الخطي إلى شكلها الخطي) تكون أكبر من قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لشكلها الغير خطي. كلما كانت الطبيعة الغير خطية للاتجاه

العام للسلسلة قوية كلما كان الفرق في قيمتي معامل الارتباط المشار إليهما أوضح.

في الأخير نشير إلى أنه إذا كان الاتجاه العام لتطور السلسلة غير خطي فإنه من أجل اختيار المعادلة التي تمثله أحسن تمثيل، يمكن اختبار أقرب المعادلات إلى الاتجاه العام المحصل عليه ثم حساب معامل التحديد (R^2) لكل منها. المعادلة التي تكون فيها قيمة معامل التحديد أكبر هي التي تكون أقرب إلى تمثيل الاتجاه العام للسلسلة المدروسة.

د : نمذجة التقلبات الموسمية و الدورية

إن اقتراح معادلة التمثيل بناءا على شكل الانتشار قد لا يكون أمرا سهلا وخاصة عندما تكون القيم الفعلية (y_t) متذبذبة بحدة وبكثرة. لذلك يجب تسوية أو التخلص من هذه التقلبات و التذبذبات.

من ضمن الطرق المعروفة لتحليل هيكل السلاسل الزمنية التي تحتوي على تقلبات موسمية، دورية أو عشوائية هي طريقة المتوسطات المتحركة. باستعمال هذه الطريقة نستخرج قيم مكونات الاتجاه العام، المكونات الموسمية (أو الدورية) من خلال تكوين نوعين من النماذج: الشكل الجمعي والشكل الجدائي لنموذج تطور السلسلة الزمنية.
الشكل العام للنموذج الجمعي هو: $Y = \hat{T} + S + C + A$

حيث أن:

$\hat{T}$: هي مكونات دالة الاتجاه العام لتغير قيم السلسلة عبر الزمن.
S : مكونات التغيرات الموسمية.
C : مكونات التقلبات الدورية.
A : المكونات العشوائية.

هذا النموذج يفترض أن كل قيمة من قيم السلسلة يمكن التعبير عنها كحاصل جمع مكونات الاتجاه العام($\hat{T}$)، الموسمJي (S)، الدوري (c) والعشوائي(A):
أما الشكل العام للنموذج الجدائي فهو :

$Y = \hat{T} + S + C + A$ ويعني أن قيمة أي حد من حدود السلسلة هو عبارة عن ناتج جداء مكونات الاتجاهات الأربعة (A, C, S, T) .
اختيار أي من هذين الشكلين للتعبير عن طبيعة السلسلة الزمنية يتم عن طريق تحليل هيكل التقلبات الموسمية والدورية. إذا كان مدى التغيرات الموسمية تقريبا ثابت فإنه عادة ما نلجأ إلى اختيار النموذج الجمعي للسلسلة الزمنية. أما إذا كان مدى التقلبات الموسمية يتزايد أو يتناقص، في هذه الحالة يفضل النموذج الجدائي.

تكوين أي من النموذجين السابقين يستلزم حساب قيم($\hat{T}$), (S), (S), (A),(C) لكل حد من حدود السلسلة الزمنية. القيام بهذه العملية يتم وفق الخطوات التالية:

1 - تعديل القيم الابتدائية للسلسلة باستخدام المتوسط المتحرك.

2 – حساب قيم معاملات التأثير الموسمي (S_i).

3 – التخلص من مكونات التأثير الموسمي (الدوري) الموجودة في القيم الأصلية للسلسلة الزمنية والحصول على القيم المعدلة ($T + A = y_t - S_i$) للنموذج الجمعي أو ($T.A = y_t / S_i$) إذا كان النموذج جدائي.

4 - نرسم شكل الانتشار لسلسلة القيم (T + A) أو (T.A) فنحصل على شكل انتشار أكثر وضوحا من شكل الانتشار الابتدائي.

5 – حساب القيم التقديرية($\hat{T}$) للسلسلة حسب معادلة الانحدار المختارة لتمثيل الاتجاه العام لهذه السلسلة و ذلك بالاعتماد على قيم (T +A) أو (T.A).

6 – حساب القيم التقديرية ($\hat{T}$ +S) أو ($\hat{T}$ .S) المحصل عليها حسب معادلة التمثيل المختارة ، وذلك بإضافة مكونات التقلبات الموسمية والدورية إلى القيم التقديرية للاتجاه العام .

7 – حساب الأخطاء النسبية أو المطلقة($A = y_t - (\hat{T} + S_i)$ أو $A = y_t - (\hat{T} / S_i)$ الناتجة عن إهمال التغيرات العشوائية .

IV–1– 2 دراسة نماذج الانحدار الممثلة للعلاقة بين السلاسل الزمنية:

أ – خصوصية نماذج الانحدار الممثلة للعلاقة بين سلسلتين زمنيتين:

إن دراسة علاقة التبعية (سبب – نتيجة) بين متغيرات معروضة في شكل سلاسل زمنية، هي واحدة من أعقد المسائل في النمذجة القياسية. استعمال الطرق التقليدية لتحليل الانحدار و الارتباط السابق التعرض إليها، لمعالجة مثل هذا النوع من نماذج الانحدار يمكن أن يؤدي إلى مشاكل جدية تظهر سواء في مرحلة تقدير النموذج أو في مرحلة تحليله وتقييمه. هذه المشاكل تتعلق بالدرجة الأولى بخصوصية السلاسل الزمنية كمصدر للمعطيات في البحث القياسي. لقد أشرنا سابقا إلى أن كل حد من حدود السلسلة الزمنية يحتوي على ثلاثة مكونات: الاتجاه العام، التقلبات الدورية والموسمية والمكون العشوائي.

كيف يؤثر وجود هذه المكونات في حدود السلاسل الزمنية على نتيجة التقدير والتحليل القياسي المبني أو المستعمل لمعطيات هذه السلاسل. إن وجود مكونات موسمية أو دورية في حدود سلسلتين

زمنيتين يؤدي إلى تضخم قيم أدوات قياس قوة ومتانة العلاقة الارتباطية بين حدود هذين السلسلتين إذا كانت التقلبات الموسمية أو الدورية الموجودة فيهما هي ذات نفس التردد. كما قد يؤدي إلى تخفيض قيم أدوات قياس الارتباط في حالة ما إذا كانت التقلبات الموسمية أو الدورية موجودة في واحدة من السلسلتين فقط أو موجودة في كليهما ولكن بتردد مختلف. لذلك، وقبل استعمال المعطيات الأولية الواردة في السلاسل الزمنية في تكوين ودراسة النماذج القياسية، يجب أولا التخلص من المكونات الموسمية و الدورية الموجودة في حدود هذه السلاسل الزمني. هذه الخطوة يمكن إنجازها، كما رأينا سابقا، باستعمال طريقة المتوسطات المتحركة.

سوف نتعرض فيما يلي لطرق تحليل تفاعل السلاسل الزمنية ونعتبر أن حدود السلاسل المدروسة لا تحتوي على مكونات موسمية أو دورية. نفترض أننا نريد تكوين نموذج انحدار باستعمال حدود سلسلتين زمنيتين (y_t) و(x_t). هذا يتطلب أولا دراسة العلاقة الارتباطية بين قيم هذين السلسلتين. من أجل التقييم الكمي لهذه العلاقة نستعمل معامل الارتباط الخطي. إذا كان لكلا السلسلتين اتجاه عام فإن القيمة المطلقة لمعامل الارتباط تكون كبيرة (موجبة في حالة ما إذا كان الاتجاهين العامين للسلسلتين (y_t) و(x_t) يتطوران في نفس الاتجاه، وسالبة في حالة ما إذا كان الاتجاهان متعاكسين). لكن هذه القيمة الكبيرة لمعامل الارتباط في حد ذاتها لا تسمح لنا باستنتاج أن السلسلة (x) هي العنصر المسبب و أن (y) هي العنصر الناتج أو العكس.

إن قيمة معامل الارتباط المرتفعة في هذه الحالة ناتجة فقط عن ارتباط قيم السلسلة (x) و(y) بالزمن أو نتيجة لأنه لهما اتجاهين عامين. يمكن أن نلاحظ في كثير من الحالات أن سلسلتين زمنيتين يمكن أن يكون لهما نفس الاتجاه العام أو لهما اتجاهين عامين متعاكسين ويكون كنتيجة لذلك معامل الارتباط بينهما قوي، ولكن في الواقع لا تجمعهما أي علاقة سببية على الإطلاق.

مثال ذلك كأن تكون قيمة معامل الارتباط بين عدد الطلبة المتخرجين من الجامعات وقيمة الإنتاج الصناعي الخام في فترة زمنية ما مرتفعة، لكن هذا لا يعني طبعا أن زيادة عدد المتخرجين يؤدي إلى زيادة الإنتاج الصناعي أو أن زيادة الإنتاج الصناعي يحفز زيادة تخرج الطلبة.

من أجل تجاوز هذه الإشكالية والحصول على معامل ارتباط يعكس العلاقة السببية بين السلاسل المدروسة، يجب التخلص مما يسمى بالارتباط الخاطئ (المغلوط)، الناتج عن وجود اتجاه عام في كلا السلسلتين (أي الناتج عن تأثر قيم السلسلتين بالزمن). تحقيق هذا الهدف يتم باستعمال واحدة من طرق عزل أو التخلص من مكونات الاتجاه العام في قيم السلسلة المعنية. سوف نوضح محتوى هذه الطرق لاحقا.

بالإضافة إلى الإشكالية السابقة، المتعلقة بوجود الاتجاه العام وتأثيره على تقييم متانة وقوة العلاقة الارتباطية بين قيم السلاسل الزمنية المستعملة في تكوين نماذج الانحدار، هناك إشكالية أخرى تتعلق بارتباط قيم السلاسل الزمنية بعنصر الزمن.

نفترض أنه باستعمال السلسلتين الزمنيتين (x_t)و (y_t) تم تكوين نموذج الانحدار البسيط التالي:

$y_t = a + b.x_t+\varepsilon_t$. إن وجود اتجاه عام لكلا السلسلتين الزمنيتين يعني أن المتغير المستقل (x_t) والمتغير الناتج (y_t) في هذا النموذج كلاهما متأثران بعامل الزمن(t). لكن عنصر الزمن(t) لم يأخذ بعين الاعتبار في نموذج الانحدار المذكور. إن تأثير عنصر الزمن في هذه الحالة يظهر من خلال وجود علاقة ارتباطية بين قيم حد الخطأ في فترة زمنية معينة t (وهي ε_t) و فترة زمنية سابقة لها (وهيε_{t-1}). إذا كان هذا الارتباط موجودا فهو يسمى عادة بالارتباط الذاتي لحدود الخطأ.

الارتباط الذاتي لحدود الخطأ – هو خرق لإحدى الافتراضات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى، التي تنص على الطابع العشوائي للخطأ (ε) المحصل عليه بواسطة نموذج الانحدار. بمعنى آخر استقلال القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية معينة (ε_t) عن القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية سابقة لها (ε_{t-1}).

عناك طرق خاصة تستعمل لتقييم الارتباط الذاتي لحد الخطأ وكيفية التخلص منه، سنتعرض لها لاحقا.

ب – طرق التخلص من الاتجاه العام للسلاسل الزمنية

جوهر كل الطرق المستعملة في إلغاء مكون الاتجاه العام للسلسلة الزمنية يتمثل في التخلص أو تحييد تأثير عنصر الزمن على تكوين حدود أو قيم السلسلة. هذه الطرق يمكن تقسيمها إلى قسمين:

* الطرق التي تعتمد على تحويل الحدود الأولية للسلسلة الزمنية إلى قيم جديدة لا تحتوي على مكون الاتجاه العام (T). الحدود الجديدة

المحصل عليها تستعمل بعد ذلك في دراسة و تحليل العلاقة بين السلاسل الزمنية المدروسة. من هذه الطرق- طريقة الانحرافات عن الاتجاه العام و طريقة الفروقات المتتالية.

* الطرق التي تعتمد على دراسة العلاقة بين حدود سلسلتين زمنيتين بعد التخلص من تأثير عنصر الزمن (t) على المتغير المستقل والمتغير التابع لنموذج الانحدار المشكل. يتعلق الأمر هنا بالدرجة الأولى بطريقة إدخال عنصر الزمن في نموذج الانحدار المشكل من المعطيات الأصلية للسلاسل الزمنية.

ب – 1 طريقة الانحرافات عن الاتجاه العام:

نفترض أنه لدينا سلسلتين زمنيتين (x_t) و(y_t) كل واحدة منها تحتوي على مكونات الاتجاه العام (T) والمكونات العشوائية (ε_t). إن تعديل كل من هذين السلسلتين يسمح بإيجاد معاملات معادلات انحدار الاتجاه العام لكل منهما وحساب قيمتهما التقديرية $\hat{x}_t$ و$\hat{y}_t$ المقابلة لكل فترة زمنية (t). هذهِ القيم التقديرية يمكن اعتبارها كقيم تقديرية للاتجاه العام ($\hat{T}$) لكل من السلسلتين الزمنيتين المذكورتين. لذلك فإنّ تأثير الاتجاه العام في السلسلة الزمنية يمكن تحييده أو التخلص منه عن طريق طرح القيم التقديرية لحدود السلسلة ($\hat{T}$) من قيمها الفعلية(y_t). تجرى هذه العملية لكل حد من حدود السلسلة الزمنية على حدة.

إن تقدير نموذج الانحدار($y_t = a + b.x_t + \varepsilon$)، الناتج عن دمج معطيات السلسلتين الزمنيتين (x_t) و(y_t) يتم ليس باستعمال قيم الحدود الأولية

لهذين السلسلتين ولكن باستعمال انحرافات قيم هذه الحدود عن القيم التقديرية للاتجاه العام($\Delta x_t = x_t - \hat{x}_t$) ، $(\Delta y_t = y_t - \hat{y}_t)$.

عندئذ النتائج المحصل عليها باستعمال نموذج الانحدار المبني على انحرافات القيم الفعلية عن التقديرية $\Delta y_t = a' + b'.\Delta x_t$ تكون أكثر دقة وواقعية في التعبير عن العلاقة الحقيقية بين السلسلتين الأوليتين (y_t,x_t) . بعبارة أخرى يمكن الاستعاضة عن النموذج $\hat{y}_t = a + b.x_t$ بدراسة النموذج $\Delta\hat{y}_t = a' + b'.\Delta x_t$.

ب – 2 – طريقة الفروقات المتتالية

في بعض الحالات، من أجل التخلص من تأثير مكونات الاتجاه العام في السلسلة الزمنية، نستعمل طريقة أخرى أكثر بساطة تسمى طريقة الفروقات المتتالية.

إذا كانت السلسلة الزمنية تحتوي على اتجاه عام خطي واضح، فإنه بالإمكان تحييد أو التخلص من مكونات هذا الاتجاه العام عن طريق تعويض الحدود الأصلية (الفعلية) للسلسلة بسلسلة الفروقات المطلقة المتتالية (الفروقات الأولى) بين حدود السلسلة.

نفترض أن معادلة الاتجاه العام للسلسلة هي: $\hat{y}_t = a + b.t$

حيث أن :

$y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t$

ε_t: الخطأ العشوائي.

فيكون عندئذ الفرق الأول بين (y_t) و (y_{t-1}) كالتالي:

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} = a + b.t + \varepsilon_t - [a + b.(t-1) + \varepsilon_{t-1}] = b + (\varepsilon - \varepsilon_{-1})$$

معامل الانحدار (b) في هذه الحالة أصبح مقدار غير تابع للزمن (t) .

في حالة وجود اتجاه عام خطي واضح، حدود الخطأ ε_t تكون صغيرا جدا، وحسب افتراضات طريقة المربعات الصغرى يكون لهذه المقادير طابع عشوائي. لذلك فإن الفروقات الأولى لحدود السلسلة (Δ_t) هي مقادير غير تابعة للزمن (t) وبالتالي يمكن الاعتماد عليها في دراسة علاقة السلاسل الزمنية ببعضها.

إذا كان للسلسلة الزمنية اتجاه عام في شكل معادلة من الدرجة الثانية، فيمكن في هذه الحالة التخلص من الاتجاه العام بتعويض قيم الحدود الأصلية للسلاسل الزمنية" بالفروقات من المرتبة الثانية ".

نفترض أن معادلة الاتجاه العام للسلسلة هي:

$y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t$: و أيضا ، $\hat{y}_t = a + b_1.t + b_2.t^2$

إذن: $\Delta_t = y_t - y_{t-1} = a + b_1.t + b_2.t^2 + \varepsilon_t -$

$$- [a + b_1.(t-1) + b_2.(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}]$$

$$\Delta_t = b_1 - b_2 + 2.b_2.t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

يتضح من العلاقة المحصل عليها أن الفرق الأول (Δ_t) هو مقدار تابع مباشرة لعنصر الزمن (t) وبناء عليه فهو يحتوي على مكون الاتجاه العام. ننجز الآن الفروقات من المرتبة الثانية:

$$\begin{aligned} \Delta''_t = \Delta_t - \Delta_{t-1} &= b_1 - b_2 + 2b_2.t + (\varepsilon - \varepsilon_{-1}) - \\ &- [\, b_1 - b_2 + 2b_2.(t-1) + (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})] \\ &= 2b_2 + (\, \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}\,) \end{aligned}$$

واضح أن الفروقات الثانية Δ''_t ليست تابعة لعنصر الزمن (t) و بالتالي فهي لا تحتوي على مكونات الاتجاه العام. لذلك يمكن استعمالها في

دراسة وتحليل نماذج الانحدار المبنية على السلاسل الزمنية ذات الاتجاه العامُ في شكل قطع مكافئ.

إذا كان الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في شكل معادلة أسية أو صماء، فإن طريقة الفروقات المتتالية يجب تطبيقها ليس على قيم الحدود الأصلية ولكن على قيمها اللوغاريتمية التي تتميز بعلاقتها الخطية.

ج - اكتشاف الارتباط الذاتي لحدود الخطأ و قياسه

لقد رأينا أعلاه أن الطريقتين السابقتين تهتمان بمعالجة معطيات القيم الأصلية للسلاسل الزمنية وتصفيتها من تأثير عنصر الزمن (أي من الارتباط الذاتي) قبل استعمالها في تكوين نموذج الانحدار. أما طريقة الارتباط الذاتي لحدود الخطأ فتهتم بالعكس باستعمال معطيات السلاسل الزمنية في تكوين نماذج الانحدار قبل معالجتها (بمعنى أن تصفية تأثير عنصر الزمن على المعطيات الأولية يتم نعد تكوين نموذج الانحدار وليس قبله).

نفترض أنه باستعمال القيم الأصلية للسلسلتين الزمنيتين (y_t) و (x_t) تم تشكيل نموذج الانحدار الخطي التالي: $\hat{y}_t = a + b.x_t$. لكل فترة زمنية (t) يمكن حساب مكونات حد الخطأ (ε_t) بين القيم الفعلية (y_t) والقيم التقديرية $(\hat{y}_t)$ المحصل عليها بواسطة نموذج الانحدار السابق كالتالي: $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - (a + b.x_t)$.

بالنظر إلى القيم المتتالية لحدود الخطأ كسلسلة زمنية يمكن تكوين منحنى يمثل علاقة هذه القيم بالزمن (t). لقد أشرنا سابقا أن أحد الفرضيات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى تنص على أن قيم الخطأ (ε_t) يجب أن تكون عشوائية ، بمعنى مستقلة عن الزمن. لكن في كثير

من الحالات عند تحليل نماذج الانحدار المعتمدة على معطيات السلاسل الزمنية، نجد أن قيم الخطأ تحتوي على مكونات اتجاه عام أو تقلبات دورية أو موسمية. إن هذا يثبت أن كل قيمة من قيم حد الخطأ تعتمد على القيم السابقة لها. ارتباط قيم(ε_t) بهذا الشكل يسمى بالارتباط الذاتي لحدود الخطأ.

ينشأ الارتباط الذاتي لحدود الخطأ من عدة أسباب ذات طبيعة مختلفة من أهمها:

- وجود أخطاء في قياس وجمع معطيات السلاسل الزمنية الداخلة في تكوين نموذج الانحدار.
- الصياغة الرياضية غير الصحيحة لنموذج الانحدار المراد تقديره.
- إغفال إبراز بعض المتغيرات في النموذج: فنموذج الانحدار المقترح يمكن أن لا يحتوي على عنصر من العناصر ذات التأثير الكبير على الظاهرة المدروسة. غياب تمثيل هذا العنصر في النموذج المقدر يؤدي إلى ظهور وانعكاس تأثيره على الأخطاء (εt)، ويكون نتيجة ذلك وجود ارتباط ذاتي بين قيم هذه الأخيرة. في كثير من الحالات مثل هذا العنصر يمكن أن يكون الزمن (t) أو المعطيات المتعلقة بقيم نفس العناصر الموجودة في النموذج ولكن بفترات إبطاء. وجود ارتباط ذاتي بين حدود الأخطاء (εt) يمكن أن يكون ناتجا أيضا عن عدم إبراز مجموعة من العناصر غير الأساسية في النموذج، لكن تأثيرهم المشترك على النتيجة كبير، نظرا لتطابق تغير اتجاهاتهم العامة أو تماثل تقلباتهم الدورية أو الموسمية.

من الآثار المعروفة لوجود ارتباط ذاتي بين قيم حدود الخطأ(ε_t) لنموذج انحداري ما هو أن القيم المقدرة لمعاملات انحدار هذا النموذج، المحصل عليها بواسطة طريقة المربعات الصغرى، تكون غير متحيزة.

كما أن تباين هذه القيم لا يكون أقل ما يمكن. مما يترتب عليه ارتفاع قيم الأخطاء المعيارية ($S.E_b$)، انخفاض القيم المحسوبة (t_{reel}) لمقياس ستيودنت واتساع المجال الذي تتراوح فيه القيم الفعلية لمعاملات معادلة الانحدار.

توجد هناك عدة طرق واختبارات لاكتشاف وقياس الارتباط الذاتي لحدود الخطأ. أبسط هذه الطرق هو رسم منحنى قيم(ε_t) بدلالة الزمن (t) واستنتاج وجود أو عدم وجود ارتباط ذاتي بين هذه القيم بمعنى وجود أو عدم وجود اتجاه عام لهذه القيم. من بين الاختبارات الأكثر استعمالا لاكتشاف وجود الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لحدود الخطأ هو اختبار (Durban- Watson). يعتمد هذا الاختبار على حساب مقياس d كالتالي:

$$d_{reel} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}$$

حيث أن(d)هو حاصل قسمة مجموع مربع فروقات القيم المتتالية لحد الخطأ على مجموع مربع انحرافات القيم الفعلية عن التقديرية لنموذج الانحدار. قيمة (d) المستخرجة بواسطة العلاقة السابقة تسمى القيمة المحسوبة أو الحقيقية لاختبار(D-W).

معامل الارتباط الذاتي لحدود الخطأ من المرتبة الأولى يحسب كالتالي:

$$r_1^{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_1).(\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_1)^2 . \sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_2)^2}}$$

حيث أن :

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}}{n-1} \quad \text{و} \quad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t}{n-1}$$

بما أن (εt) هي أخطاء ، تم الحصول عليها بواسطة معادلة الانحدار، المقدرة بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية طبقا لافتراضات هذه الطريقة المشار إليها سابقا، فإن مجموع قيم (ε_t) وقيمتها المتوسطة تساوي الصفر: $\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t}{n} = 0 \quad ; \quad \sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t = 0$

في هذه الحالة يمكن اعتبار أن : $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1 = 0$.

نفترض أيضا أن : $\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}^2$.

باعتبار الفرضيتين السابقتين، عبارة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى السابقة تتحول إلى الصيغة التالية :

$$r_1^{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t . \varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 . \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}^2}} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t . \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2}$$

نستطيع أيضا إعادة صياغة عبارة حساب مقياس d_{reel} السابقة :

$$d_{reel} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 - 2.\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t . \varepsilon_{t-1} + \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2}$$

باعتبار العلاقة : $$\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n}\varepsilon_{t-1}^2$$

فإن العبارة السابقة تصبح على الشكل التالي :

$$d_{reel} = \frac{2.\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2 - 2.\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t . \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2} = 2.\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t . \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n}\varepsilon_t^2}\right)$$

إذا ما قارنا هذه العبارة بعبارة حساب قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لحدود الخطأ فإننا نستطيع استخراج العلاقة التالية التي تجمع بين قيمة مقياس (d_{reel}) و معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لحد الخطأ (r_1^{ε}) كالتالي : $d_{reel} \approx 2.(1- r_1^{\varepsilon})$

من هذه العلاقة يمكن استنتاج الحالات التالية:

إذا كانت قيم الأخطاء (ε_t) تحتوي على ارتباط ذاتي كلي موجب (r_1^{ε} =1) فإن $d = 0$. إذا كانت قيم (ε_t) تحتوي على ارتباط ذاتي كلي سالب($r_1^{\varepsilon} = -1$) فإن (d) في هذه الحالة تساوي 4 . أما إذا كانت قيم (ε_t) لا تحتوي على ارتباط ذاتي فإن ($r_1^{\varepsilon} = 0$) و تكون ($d_{reel} = 2$) . أي أن d تتغير في حدود المجال [0,4] : $0 \leq d_{reel} \leq 4$. اكتشاف الارتباط الذاتي لحدود الخطأ من المرتبة الأولى باستعمال مقياس(DW) يتم كالتالي:

نرمز بـــH_0 لفرضية عدم وجود ارتباط ذاتي بين قيم (ε_t) ونرمز بـــ H_1 و H_2 لفرضيات وجود ارتباط ذاتي موجب وسالب بين قيم (ε_t). تسمى قيم (d_{tab}) بالقيم الحرجة أو الجدولية لمقياس (DW). توجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى للقيم الحرجة (d_L , d_u): في جداول إحصائية خاصة لعدد من المشاهدات (n) وعدد من المتغيرات المستقلة في النموذج $(\acute{K})$ ومستوى معنوية $(\acute{\alpha})$. حسب القيم الجدولية (d_{tab}) لمقياس (D-W) يقسم المجال[0,4] إلى خمسة أقسام. رفض أو قبول الفرضيات السابق الإشارة إليها (H_2,H_1,H_0) باحتمال $(1- \acute{\alpha})$ ممثل في الجدول التالي:

يوجد ارتباط ذاتي موجب بين قيم(εt). نرفض $H0$ باحتمال $P = (1- \acute{\alpha})$	منطقة عدم التحديد	عدم وجود ارتباط ذاتي بين قيم(ε_t). لا نرفض H_0	منطقة عدم التحديد	يوجد ارتباط ذاتي سالب بين قيم (εt). نرفض$H0$ باحتمال $P = (1- \acute{\alpha})$

0 d_L d_u 2 $4\text{-}d_u$ $4\text{-}d_L$ 4

إذا كانت القيم الفعلية لمقياس (d) وهي (d_{reel}) توجد في منطقة عدم التحديد فإنه من الناحية التطبيقية عادة ما يفترض وجود ارتباط ذاتي وترفض فرضية H_0.

توجد عدة نقائص جوهرية لمقياس (DW) نذكر منها على الخصوص ما يلي:

- لا يمكن استعمال هذا المقياس في اكتشاف عدم الارتباط الذاتي في النماذج التي تحتوي على متغيرات مستقلة في شكل متغيرات تابعة بفترات إبطاء (y_{t-1} , y_{t-2} , ...)، أي في نماذج الانحدار الذاتي. من اجل اكتشاف الارتباط الذاتي لحد الخطأ في نماذج الانحدار الذاتي يستعمل مقياس (h) لـ (Durbin).
- طريقة حساب واستعمال مقياس (DW) موجهة فقط لاكتشاف الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى.
- أما من أجل اكتشاف وجود الارتباط الذاتي في حدود الخطأ من المرتبة الثانية وأكثر يجب تطبيق طرق أخرى واستعمال مقاييس أخرى.
- مقياس (DW) يعطي نتائج صحيحة تتمتع بمصداقية إحصائية عالية فقط في الحالات التي يكون فيها حجم العينة المستعملة كبيرا.

د – معالجة الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى في حدود الخطأ (ε_t):

نعتبر سلسلة الافتراضات التالية:

- بالاعتماد على السلسلتين (x_t) و (y_t) تم تقدير نموذج الانحدار التالي: $y_t = a + b.x_t + \varepsilon$.
- حدود السلسلتين (x_t) و (y_t) تحتويان على مكونات اتجاه عام.
- قيم معاملات معادلة الانحدار (b,a) تم الحصول عليهما باستعمال طريقة المربعات الصغرى.
- مقياس (d) أوضح وجود ارتباط ذاتي من المرتبة الأولى بين حدود الخطأ المحصل عليها بواسطة معادلة الانحدار المقدرة.

يمكن توضيح كيفية تقدير معادلة الانحدار في حالة وجود ارتباط ذاتي من المرتبة الأولى لحدود الخطأ في نموذج الانحدار المقدر كالتالي:

نموذج الانحدار السابق في الفترة الزمنية (t-1) يمكن كتابته على الشكل التالي: $y_{t-1} = a + b.x_{t-1} + \varepsilon_{t-1}$

نضرب طرفي هذه المعادلة في (r_1^{ε}) فتتحول إلى الشكل التالي :

$$r_1^{\varepsilon}.y_{t-1}= r_1^{\varepsilon}.\ a + r_1^{\varepsilon}.b.x_{t-1} + r_1^{\varepsilon}.\varepsilon_{t-1}$$

نطرح العناصر المتشابهة لهذه المعادلة من مثيلاتها في المعادلة الأولى فنحصل على المعادلة التالية:

$$y_t - r_1^{\varepsilon}.y_{t-1} = a - r_1^{\varepsilon}.a + b.x_t - r_1^{\varepsilon}.b.x_{t-1} + r_1^{\varepsilon}.\varepsilon_t- r_1^{\varepsilon}.\ \varepsilon_{t-1}$$

معالجة المعادلة السابقة يسمح بالحصول على الشكل التالي:

$$y_t- r_1^{\varepsilon}.y_{t-1} = a.(1- r_1^{\varepsilon}) + b.(x_t- r_1^{\varepsilon}.x_{t-1}) + \varepsilon_t- r_1^{\varepsilon}.\varepsilon_{t-1}$$

نكتب الشكل المختصر للمعادلة المحصل عليها:

$$\acute{y}_t = \acute{a} + b.x'_t + u_t$$

حيث أن:

$$\acute{y}_t = y_t - r_1^{\varepsilon}.y_{t-1}\ ;\ x'_t = x_t - r_1^{\varepsilon}.x_{t-1}\ ,$$
$$u_t = \varepsilon_t- r_1^{\varepsilon}.\varepsilon_{t-1}\ ,\ \acute{a} = a.(1- r_1^{\varepsilon})$$

ما دام أن (u_t) هو متغير عشوائي فإنه يمكن استعمال طريقة المربعات الصغرى من أجل تقدير معاملات المعادلة المختصرة السابقة حسب الخطوات التالية:

- تحويل القيم الأصلية للمتغيرات (x_t), (y_t) إلى قيم المتغيرات , (x'_t) $(\acute{y}_t)$ باستعمال العلاقات المعطاة أعلاه.
- استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية من أجل تقدير المعاملات $(\acute{a})$, (b) .

- حساب قيم المعامل الحر (a) لمعادلة الانحدار الأصلية من العلاقة $a = \acute{a}.(1 - r_1^{\varepsilon})$ المعطاة أعلاه.
- كتابة معادلة الانحدار الجديدة . هذه المعادلة تتميز بفعالية إحصائية عالية نظرا لأن حدود الخطأ(ε_t) المحصل عليها بواسطة هذه المعادلة لا تحتوي على الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى.

IV-1-3- النماذج القياسية الديناميكية

أ- الخصائص العامة للنماذج الديناميكية:

في ميدان القياس الاقتصادي لا يمكن اعتبار كل النماذج، المكونة باستعمال معطيات السلاسل الزمنية، على أنها نماذج ديناميكية. فمصطلح "ديناميكي" في هذه الحالة يميز كل فترة زمنية (t) على حدة وليس كل المدة الزمنية التي يشملها النموذج. فالنموذج القياسي يوصف بأنه ديناميكي إذا كان يأخذ بعين الاعتبار، في كل فترة زمنية (t) القيمة الحالية والماضية للمتغيرات المستقلة التي يتكون منها. بمعنى آخر إذا كان النموذج المعني يعكس ديناميكية المتغيرات التي يتكون منها في كل فترة زمنية (t) .

هناك نوعان أساسيان من النماذج الديناميكية الاقتصادية: النموذج ذاتي الانحدار والنموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة. كلا النوعان يتميزان باحتوائهما على القيمة الماضية (السابقة) للتغيرات التي يتكونان منها، بالإضافة إلى القيم الجارية لهذه المتغيرات. عند دراسة الظواهر الاقتصادية نضطر في كثير من الأحيان إلى نمذجة بعض الحالات التي تكون فيها قيمة المتغير التابع في الفترة الزمنية الحالية (t) ناتجة عن تأثير مجموعة من العوامل، حدثت في فترة زمنية سابقة

(t-1 , t-2 , t-3 , .. , t-l). مثال ذلك: قيمة المبيعات أو الأرباح التي يمكن أن تحصل عليها مؤسسة ما في الفترة الزمنية الحالية(t) قد تكون كلها أو في جزء منها ناتجة عن المبالغ التي صرفتها المؤسسة على الإشهار أو البحوث التسويقية في فترات زمنية سابقة. القيمة « l » التي تبرز مدة التأخر في تأثير العنصر المستقل على العنصر الناتج، تسمى بفترة الإبطاء. إن التعامل مع الظواهر الاقتصادية يتطلب في حالات أخرى حل المسألة العكسية للحالة السابقة. بمعنى الحالات التي تتوقف فيها قيمة المتغير الناتج في فترات زمنية لاحقة (t + l) على قيمة المتغيرات المستقلة في الفترة الزمنية الحالية (t) . مثال ذلك: تأثير قيمة الاستثمار في الفترة الزمنية الحالية (t) على القيمة المضافة في فترات زمنية لاحقة.

تقدير النماذج الديناميكية ذاتية الانحدار أو ذات فترات الإبطاء الموزعة لها خصوصياتها. أولا لا يمكن تقدير معاملات هذين النموذجين باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية وذلك لأن هذا سوف يؤدي إلى الإخلال ببعض الافتراضات التي بنيت عليها هذه الطريقة. لذلك فإن تقدير هذه النماذج يستلزم اللجوء إلى طرق إحصائية أخرى. ثانيا، يجب على الباحث حل مسألة اختيار فترة الإبطاء وتحديد هيكلها. ثالثا، بين النوعين من النماذج الديناميكية المشار إليهما توجد علاقة متبادلة: في بعض الحالات يتطلب الأمر تحقيق المرور من أحدهما إلى الآخر.

ب – تكوين نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة

النماذج القياسية التي تحتوي على القيم الحالية (الجارية) للمتغيرات المستقلة (x_t) وعلى قيمها السابقة (x_{t-p}) أيضا، بمعنى قيم المتغيرات

المستقلة ذات فترات الإبطاء، تسمى بنماذج الانحدار ذات فترة الإبطاء الموزعة. النموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة، بافتراض أن المدة القصوى لفترة الإبطاء (L) محددة، يأخذ الشكل التالي:

$y_t = a + b_0.x_t + b_1.x_{t-1} + .. + b_p.x_{t-p} + \varepsilon$. هذا النموذج يعني أنه إذا تغير العنصر المستقل (x_t) في الفترة الزمنية الحالية (t) ، فإن هذا التغير سوف يؤثر على قيمة المتغير التابع (y_t) خلال (L) من الفترات الزمنية اللاحقة.

- المضاعف قصير المدى: معامل الانحدار(b0) للمتغير (xt) يعكس التغير المطلق للمتغير التابع (yt) عندما يتغير (xt) في الفترة الحالية (t) بوحدة واحدة. بدون احتساب التأثير المتأخر للمتغير(x) على (y). بمعنى آخر قيمة (b0) تساوي مقدار تأثير (X) على (y) في الفترة الجارية بدون الأخذ بعين الاعتبار تأثير الأول على الثاني في الفترات الزمنية السابقة (xt-1 , xt-2 , .. , xt-p) . المعامل (b0) يسمى بالمضاعف قصير المدى.

- المضاعف طويل المدى: في المدة (t+1) يكون مقدار تأثير المتغير المستقل (x_t) على المتغير الناتج (y_t) يساوي ($b_0 + b_1$) وحدة لكل وحدة واحدة يتغير بها (x_t) . أما في الفترة (t+2) فإن قيمة هذا التأثير يمكن التعبير عنها ب($b_0 + b_1 + b_2$) وهكذا حتى نهاية مدة الإبطاء) (L) . مجموع مقدار تأثير x_t على y_t خلال كل مدة الإبطاء القصوى) (t + L يعبر عنها بالمجموع ($b = b_0 + b_1 + b_2 + .. + b_L$). المقدار (b) يسمى بالمضاعف طويل المدى.

- المعاملات النسبية للنموذج: عند قسمة القيم المطلقة لمعاملات النموذج(b_j) على(b) فإننا نحصل على القيم: $\beta_j = \frac{b_j}{b}$ حيث ، ($j = 0 , L$). هذه المقادير تسمى بالمعاملات النسبية لنموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة. إذا كان لكل المعاملات(b_j) نفس الإشارة فإنه ، لأي من(j) ، يكون:

$\sum_{j=0}^{L} \beta_j = 1$ و $0 < \beta_j < 0$. في هذه الحالة المعاملات النسبية (β_j) تمثل أوزانا لمعاملات النموذج المناسبة لها (b_j).كل واحد منها يقيس نسبة مساهمته في التغير الكلي للمتغير الناتج(y).

- مدة الإبطاء المتوسطة: قيمة مدة الإبطاء المتوسطة للنموذج تحسب كمقدار حسابي متوسط مرجح كالتالي: $\overline{L} = \sum_{j=0}^{L} j.\beta_j$. مدة الإبطاء المتوسطة تعني الفاصل الزمني المتوسط الذي يستمر خلاله تأثر المتغير الناتج(y_t) تحت تأثير التغيرات التي تحصل في X_t في فترة زمنية (t).

إذا كانت قيمة مدة الإبطاء المتوسطة ($\overline{L}$) صغيرة فهذا يدل نسبيا على الاستجابة السريعة للمتغير الناتج للتغير في العنصر المستقل. بينما قيمة مرتفعة لهذه المدة تعني بالعكس أن تأثير العنصر المستقل على المتغير الناتج ليس فوريا وأنه سيستمر لمدة زمنية طويلة. مثال: حسب نتائج دراسة علاقة الحجم الشهري المتوسط لمبيعات مؤسسة ما (y_t) بمقدار ما تنفقه على الإشهار، تم الحصول على نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء التالي: $\hat{y}_t = - 0{,}67 + 4{,}5.x_t + 3.x_{t-1} + 1{,}5.x_{t-2} + 0{,}5.x_{t-3}$.

في هذا النموذج، المضاعف قصير المدى يساوي ($b_0 = 4{,}5$) . هذا يعني أن زيادة الإنفاق على الإشهار بمقدار وحدة نقدية واحدة يؤدي

في المتوسط إلى زيادة حجم مبيعات المؤسسة ب 4,5 وحدة نقدية خلال نفس سنة زيادة الإنفاق على الإشهار. تحت تأثير زيادة الإنفاق على الإشهار ترتفع قيمة مبيعات المؤسسة في الفترة (t+ 1) إلى (7,5 = 4,5 + 3) وحدة نقدية، في الفترة 2 + t – إلى (9 = 1,5 + 7,5) وحدات نقدية. أما المضاعف طويل المدى لهذا النموذج فيساوي 9,5 + 3 + 4,5 = b) (0,5 + 1,5. هذا يعني أن زيادة الإنفاق على الإشهار بمقدار وحدة نقدية واحدة في الفترة الحالية (t) تؤدي في الأجل الطويل (خلال ثلاث سنوات مثلا) إلى زيادة رقم المبيعات بمقدار 9,5 و. ن. معاملات الانحدار النسبية في هذا النموذج هي:

$$\beta_1 = \frac{4,5}{9} = 0,474 \;\; ; \;\; \beta_2 = \frac{3}{9} = 0,316 \;\; ; \;\; \beta_3 = \frac{1,5}{9} = 0,158 \;\; ; \;\; \beta_4 = \frac{0,5}{9} = 0,053$$

بالاعتماد على هذه القيم للمعاملات النسبية نعتبر أن 47% من الزيادة الكلية في قيمة المبيعات، الناتجة عن زيادة الإنفاق على الإشهار، تحصل في الفترة الجارية، 31,6% في الفترة t+1 ، 15,8% في الفــترة 2 + t، و5,3% فقط من هذه الزيادة تحدث في الفترة3+ t. متوسط مدة الإبطاء في هذا النموذج هي (بالسنوات):

$$\overline{L} = (0,474) \,.\, 0 + (0,316) \,.\, 1 + (0,158) \,.\, 2 + (0,053) \,.\, 3 = 0,791$$

القيمة الغير كبيرة لمدة الإبطاء المتوسطة (أقل من سنة) تؤكد مرة أخرى أن الأثر الكبير لزيادة الإنفاق على الإشهار يظهر مباشرة وبصفة فورية. التفسير المشار إليه أعلاه لمعاملات نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة يتمتع بمصداقية جيدة فقط في حالة افتراض أن كل معاملات متغيرات النموذج، سواء الحالية منها أو ذات فترات الإبطاء، لها نفس الإشارة. هذا الافتراض له ما يبرره من وجهة النظر

الاقتصادية: فتأثير نفس العنصر المستقل على الظاهرة الناتجة يجب أن يكون له نفس الاتجاه بغض النظر عن فترة الإبطاء التي يؤثر فيها عليه.

ج – تقدير نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة:

إن استعمال طريقة المربعات الصغرى العادية في حل مثل هذا النوع من النماذج يضفي إلى الحصول على نتائج لا تتمتع بمصداقية إحصائية كبيرة وذلك للأسباب التالية:

أولا، درجة الارتباط بين القيم الحالية والسابقة للمتغيرات المستقلة (X_{t-p} , X_t) ، تكون كقاعدة عامة قوية. لذلك فإن تقدير معاملات النموذج في هذه الحالة تتم في ظروف ازدواج خطي مرتفع بين عناصر النموذج. ثانيا، في حالة ما إذا كانت مدة الإبطاء (L) كبيرة فإن عدد المشاهدات التي يبنى على أساسها النموذج ستنخفض ويرتفع عدد متغيراته المستقلة مما يؤدي إلى انخفاض عدد درجات الحرية للنموذج. ثالثا، في النماذج ذات فترات الإبطاء الموزعة عادة ما تظهر مشكلة الارتباط الذاتي لحدود الخطأ. كل العوامل المشار إليها أعلاه تؤدي إلى أن المعاملات المقدرة للنموذج تكون متحيزة، غير دقيقة ولا تتمتع بمصداقية إحصائية كبيرة. هذا من جهة ومن جهة أخرى يصعب كثيرا حصر التأثير الصافي لكل متغير مستقل على المتغير الناتج على حدة.

هناك طرق إحصائية أخرى تستعمل من أجل تقدير معاملات النموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة، منها على الخصوص طريقة توزيع (Koyck) ، طريقة التوزيع متعدد الحدود ل (Almon)، نموذج (Solow)، طريقة التوزيع المكيف ل) (Cagan، طريقة التعديل الجزئي ل (Nerlove) وغيرهم. سنركز في هذا المقام على نموذجي (Koyck) و(Almon) .

- نموذج فترة الإبطاء غير المحددة (نموذج Koyck):

تعتمد .طريقة (Koyck) على افتراض أن النموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة هو نموذج يتميز .بمدة إبطاء (L) غير محددة ويأخذ الشكل التالي:

$.y_t = a + b_0.x_t + b_1.x_{t-1} + b_2.x_{t-2} + .. + \varepsilon_t$

الافتراض الأساسي الذي يبنى عليه هذا النموذج هو أن هيكل مدة الإبطاء يأخذ شكل متوالية هندسية. هذا يؤدي إلى أن تأثير العنصر المستقل x_t على المتغير الناتج y_t يتناقص، بزيادة مدة الإبطاء، في شكل متوالية هندسية. .بمعنى آخر معاملات المتغيرات المستقلة ذات فترات الإبطاء تتناقص وفق متوالية هندسية. هذا المدخل إلى حل نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة وتقدير معاملاته تم اقتراحه من طرف (Koyck L. M.). إن تحليل ظاهرة اقتصادية معينة باستعمال هذا النموذج يتطلب اعتبار وجود معدل أو وتيرة ثابتة λ ($0 < \lambda < 1$) يتناقص بها تأثير المتغيرات ذات فترات الإبطاء على المتغير الناتج في الزمن. إذا افترضنا أن المتغير الناتج تغير خلال الفترة (t) .بمقدار (b_0) نتيجة تأثير تغير العنصر المستقل في نفس الفترة، فإن تأثير تغير العنصر المستقل على المتغير الناتج في الفترة (t-1) يساوي ($b.\lambda$). في الفترة t-2 – نتيجة التأثير تساوي = $b_0.\lambda.\lambda$) ($b_0.\lambda^2$) وحدة. بصفة عامة خلال فترة إبطاء تساوي (t- L) هذا التأثير يصل إلى ($b_0.\lambda^L$) وحدة. أي أن: $b_j = b_0.\lambda^j$; $j = 0 , ..$ ؛ ($0 < \lambda < 1$) . إن التقييد ($0 < \lambda$) يهدف إلى ضمان إشارات من نفس الاتجاه لكل معاملات النموذج ($0 < b_j$) . أما القيد ($1 > \lambda$) فيعني أنه بزيادة مدة الإبطاء تتناقص قيم معاملات متغيرات النموذج

وفق متوالية هندسية. كلما اقتربت λ من الصفر كلما كان ذلك يعني انخفاض وتيرة تأثير العنصر المستقل على الناتج في الزمن وارتفاع تأثيره عليه في الفترة الحالية.

إذا عبرنا عن معاملات النموذج المذكــور من خلال العلاقــة السابقة) ($b_j = b_0.\lambda^j$ فسوف نحصل على الشكل التالي:

$y_t = a + b_0.xt + (b_0.\lambda).x_{t-1} + (b.\lambda^2).x_{t-2} + .. +\varepsilon_t$.

خلال الفتـــرة (t - 1) يأخذ النموذج الصيغة التالية:

$y_{t-1} = a + b_0.x_{t-1} + b_0.\lambda.x_{t-2} + b_0.\lambda^2.x_{t-3} + .. + \varepsilon_{t-1}$. إذا ضربنا طرفي هذه المعادلة في (λ) ، نحصل على :

$\lambda.y_{t-1} = \lambda.a + b_0.\lambda.x_{t-1} + b_0.\lambda^2 x_{t-2} + b_0.\lambda^3.x_{t-3} + .. + \lambda.\varepsilon_{t-1}$.

بطرح هذه المعادلة الأخيرة من المعادلة الأولى ل (y_t) نحصل على العبارة التالية: $y_t - \lambda.y_{t-1} = a - \lambda.a + b_0.x_t + \varepsilon_t - \lambda.\varepsilon_{t-1}$.

بعد تعديل هذه العبارة نحصل على نموذج (Koyck) كما يلي:

$y_t= a.(1- \lambda) + b_0.x_t + \lambda.y_{t-1} + u_t$ ، حيث أن : $u_t = \varepsilon_t - \lambda.\varepsilon_{t-1}$.

إن هذا النموذج ما هو غلا نموذج انحدار ذاتي في (y_{t-1}) . بحساب معاملاته نستطيع الحصول على قيمة (λ) وقيم المعاملات (a , b_0) للنموذج الأصلي. بالاستعانة بالعبارة السابق الإشارة إليها أعلاه ($b_j = b_0.\lambda^j$) نستطيع استخراج قيم المعاملات (b_1 , b_2 , b_3 , ..) للنموذج الأصلي. خطوات الحل المشار إليها أعلاه تمكن من الانتقال من النموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة توزيعا غير محددا إلى نموذج انحدار ذاتي يحتوي على نوعين من المتغيرات المستقلة (x_{it}) و (y_{t-1}) . لذلك سميت هذه الطريقة بتحويلات أو توزيعات (Koyck) .

لقد أشرنا سابقا أن مجموع معاملات نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة هي عبارة عن المضاعف طويل المدى لتأثير المتغيرات ذات فترات الإبطاء على المتغير الناتج وتساوي (.. + $b = b_0 + b_1 + b_2$).
حيث أن مجموع هذه المعاملات كما يقترحها (Koyck) تشكل مجموع حدود متوالية هندسية. لذلك فإن :

$$\sum_{j=0} b_j = b_0 + b_1 + b_2 + \dots..$$

$$= b_0 + b_0.\lambda + b_0.\lambda^2 + b_0.\lambda^3 + \dots$$

$$= b_0 (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots) = b_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}$$

حينئذ قيمة فترة الإبطاء المتوسطة $\overline{L}$ في هذه الحالة تكون:

$$\overline{L} = \frac{\sum_{j=0} j.b_j}{\sum_{j=0} b_j} = \frac{b_0.\lambda.(1+2\lambda+3\lambda+\dots.)}{b_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{b_0.\lambda.\frac{1}{(1-\lambda)^2}}{b_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}}$$

$$\overline{L} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

قيمة (λ - 1) تفسر عادة على أنها عبارة عن السرعة (الوتيرة) التي يتكيف بها المتغير التابع كنتيجة لتأثير تغير المتغير المستقل عبر الفترات الزمنية المتتالية.

- نموذج فترة الإبطاء المحددة (نموذج Almon):

يستند هذا النموذج على فرضية أن مدة الإبطاء (L) هي مجال زمني محدد ويأخذ الشكل العام التالي:

$y_t = a + b_0.x_t + b_1.x_{t-1} + .. + b_p.x_{t-p} + \varepsilon_t$. لكن الافتراض الأهم الذي يعتمد عليه نموذج (Almon) هو أن مدة الإبطاء هي موزعة في شكل متعدد حدود. بمعنى أن قيمة كل معامل من معاملات نموذج فترة الإبطاء المحددة تكون في شكل متعدد حدود في (L) قوته أو من الدرجة (k). بناءا على هذا الافتراض هيكل مدة الإبطاء يمكن أن يكون في شكل متعدد حدود خطي، من الدرجة الثانية، الثالثة، .. إلخ. نموذج علاقة المعاملات (b_j)بمدة الإبطاء (j) في شكل متعدد حدود يمكن التعبير عليها كالتالي:

في متعدد الحدود من الدرجة الأولى: $b_j = c_0 + c_1.j$

في متعدد الحدود من الدرجة الثانية: $b_j = c_0 + c_1.j + c_2.j^2$

في حالة متعدد حدود من الدرجة الثالثة: $b_j = c_0 + c_1.j + c_2.j^2 + c_3.j^3$

بشكل عام، إذا كان متعدد الحدود من الدرجة (k) فإن كل معامل (b_j) من معاملات النموذج يمكن كتابته على الشكل التالي: $b_j = c_0 + c_1.j + c_2 .j^2 + .. \; c_k .j^k$. عندئذ كل معامل من معاملات نموذج فترة الإبطاء المحددة يمكن التعبير عليه كالتالي:

$$b_0 = c_0$$
$$b_1 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + .. + c_k$$
$$b_2 = c_0 + 2.c_1 + 4.c_2 + .. + 2^k.c_k$$
$$b_j = c_0 + 3.c_1 + 9.c_2 + .. + 3^k.c_k$$
$$.................................$$
$$b_j = c + L^1.c_1 + L^2.c_2 + .. + L^k.c_k$$

بتعويض قيم هذه المعاملات في المعادلة الأصلية للنموذج نحصل على الشكل التالي:

$$y_t = a + c.x_t + (c_0 + c_1 + .. + c_k).x_{t-1} +$$
$$+ (c_0 + 2.c_1 + 4.c_2 + .. + 2^k.c_k).x_{t-2} +$$
$$+ (c_0 + 3.c_1 + 9.c_2 + .. + 3^k.c_k).x_{t-3} + \dots$$
$$+ (c_0 + L.c_1 + L^2.c_2 + .. + L^k.c_k).x_{t-L} + \varepsilon_t$$

بتجميع المتغيرات ذات فترات الإبطاء حسب المعاملات (c_k) يصبح شكل النموذج كالتالي:

$$y_t = a + c_0.(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + .. + x_{t-L}) +$$
$$+ c_1.(x_{t-1} + 2.x_{t-2} + 3.x_{t-3} + .. + L.x_{t-L}) +$$
$$+ c_2.(x_{t-1} + 4.x_{t-2} + 9.x_{t-3} + .. + L^2.x_{t-L}) + ..$$
$$..+ c_k.(x_{t-1} + 2^k.x_{t-2} + 3^k.x_{t-3} + .. + L^k.x_{t-L}) + \varepsilon_t$$

إذا عبرنا عن المجاميع الموجودة داخل الأقواس بمتغير جديد (z_k) فنستطيع كتابة الشكل السابق للنموذج كالتالي:

$y_t = a + c_0.z_0 + c_1.z_1 + c_2.z_2 + .. + c_k.z_k$. حيث أن:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + .. + x_{t-L} = \sum_{j=0}^{L} x_{t-j}$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2.x_{t-2} + 3.x_{t-3} + .. + L^2.x_{t-L} = \sum_{t=1}^{L} j.x_{t-j}$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4.x_{t-2} + 9.x_{t-3} + .. + L^2.x_{t-L} = \sum_{j=1}^{L} j^2.x_{t-j}$$

....

$$z_k = x_{t-1} + 2^k.x_{t-2} + 3^k.x_{t-2} + .. + L^k.x_{t-L} = \sum_{j=1}^{L} j^k.x_{t-j}$$

خطوات استعمال طريقة (Almon) لحساب معاملات نموذج فترات الإبطاء الموزعة المحددة نوردها مختصرة كالتالي:

1- تحديد القيمة القصوى لمدة الإبطاء (L) .

2- تحديد درجة متعدد الحدود، المعبر عن هيكل فترة الإبطاء (عادة $k < L$).

3- تحسب قيم المتغيرات (z_0 , z_1 , .. , z_k)حسب العلاقات المشار إليها أعلاه.

4- تحسب قيم المعاملات c_k لمعادلة الانحدار الخطية السابقة $y_t(z_k)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

5- بالاعتماد على قيم المعاملات c_k المحصل عليها في 4، تحسب قيم المعاملات (b_j) للنموذج الأصلي من العلاقات المشار إليها سابقا.

د- تكوين النموذج ذاتي الانحدار:

النماذج ذاتية الانحدار، كما تمت الإشارة إليه سابقا، هي نماذج زمنية، قيمة المتغير التابع فيها (y_t) يتوقف على قيم عدد (n) من المتغيرات المستقلة (x_{1t} , x_{2t} , .. , x_{pt}) في الفترة (t) وعلى قيم يأخذها المتغير التابع نفسه في فترات زمنية سابقة (y_{t-1} , y_{t-2} , .. , y_{t-L}). هذا يعني أنه بالإضافة إلى المتغيرات المستقلة، فإن القيمة الجارية للمتغير (y_t) يمكن أن تتأثر أيضا بقيمة نفس هذا المتغير في فترات زمنية سابقة.القيم السابقة للمتغير الناتج هي عبارة عن متغيرات ذات فترات إبطاء وتكون موجودة في الطرف الأيمن من معادلة الانحدار. بمعنى تلعب دور المتغيرات المستقلة. الشكل العام للنموذج ذاتي الانحدار هو:

$$y_t = a + b_{01}.x_{1t} + b_{02}.x_{2t} + .. + b_{0p}.x_{pt} + \\ + c_1.y_{t-1} + c_2.y_{t-2} + .. + c_L.y_{t-L} + \varepsilon_t$$

من وجهة النظر التطبيقية، نموذج الانحدار الذاتي الأكثر استعمالا هو النموذج من المرتبة الأولى. أي النموذج الذي يحتوي على قيمة للمتغير التابع بفترة إبطاء واحدة فقط (y_{t-1}) ويكون شكله كالتالي:

$$y_t = a + b_{01}.x_{1t} + b_{02}.x_{2t} + .. + b_{0p}.x_{pt} + c_1.y_{t-1}\ \varepsilon_t\ .$$

كما رأينا في النموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة، المعاملات ($b_0 , b_{02} , .. , b_{0p}$) في هذا النموذج تعكس التغير قصير المدى في المتغير الناتج (y_t) تحت تأثير التغيرات في المتغيرات المستقلة ($x_{1t} , x_{2t} , .. , x_{pt}$) بوحدة واحدة (المضاعف قصير المدى). بمعنى آخر، المضاعف قصير المدى الذي يعبر عن مقدار تأثر المتغير الناتج (y_t) في الفترة الحالية يساوي في هذه الحالة مجموع تأثيرات العناصر المستقلة (x_{pt} , .., x_{2t} , x_{1t}) على (y_t) والتي تتم كلها في الفترة الجارية (t): $B_0 = b_{01} + b_{02} + .. + b_{0p}$. أما مفهوم المضاعف طويل المدى في النموذج ذاتي الانحدار فيختلف نوعا ما عن مثيله في النموذج ذو فترة الإبطاء الموزعة. مقدار تغير المتغير الناتج(y_t) ، في الفترة الزمنية (t +1) تحت تأثير تغير المتغيرات المستقلة (x_{pt}) في الفترة (t)، يساوي (B_0) وحدة. أما المتغير الناتج (y_{t+1}) فيتغير بمقدار (c_1) وحدة كنتيجة لتأثير تغيره الذاتي في الفترة السابقة. لذلك فإن التغير الكلي المطلق للمتغير الناتج في الفترة (t+1) يساوي المقدار ($B_0.c_1$) وحدة. بنفس المنهج نعتبر أنه في الفترة (t+2) يكون التغير الكلي المطلق في المتغير الناتج يســـاوي ($B_0.c_1.c_1 = B_0.c_1^2$)وحدة .. إلخ. من هنا فإن المضاعف طويل المدى في النموذج ذاتي الانحدار يمكن حسابه كمجموع للمضاعفات متوسطة وقصيرة المـــدى: $B= B_0 + B_0.c_1 + B_0.c_1^2 + B_0.c_1^3 + ..,$.

من وجهة النظر التطبيقية عادة ما يفترض في كل النماذج ذاتية الانحدار توفر شرط الاستقرار الذي ينص على أن القيمة المطلقة لمعامل الانحدار للمتغير (y_{t-1}) هي أصغر من الواحد ($1 > |c|$). هذا الافتراض يسمح بكتابة الصيغة السابقة للمضاعف طويل المدى لنموذج الانحدار الذاتي على الشكل التالي:

$$B = B_0 (1 + c_1 + c_1^2 + c_1^3 + ..) = \frac{b_0}{1 - c_1}$$. حيث أن : $|c| < 1$.

هذا التفسير لمعاملات نموذج الانحدار الذاتي وحساب مضاعفه طويل المدى يعتمد على افتراض أن تأثير القيمة الحالية للمتغير التابع (y_t) على قيمته المستقبلية (y_{t+1}) تتم خلال فترة إبطاء غير محددة.

مثال: نفترض أنه بالاعتماد على المعطيات الفعلية لتطور مؤشرات الاستهلاك والدخل في منطقة ما، تم الحصول على نموذج ذاتي الانحدار يعكس علاقة متوسط الاستهلاك السنوي للفرد (c) بمتوسط دخله السنوي (y) ومقدار استهلاكه في السنة السابقة (y_{t-1}) كالتالي: $\hat{c}_t = 3 + 0,85.y_t + 0,1.c_{t-1}$. المضاعف قصير المدى يساوي0,85 ، وهو يعني حسب هذا النموذج الميل الحدي للاستهلاك في المدى القصير. الشئ الذي يعني أن ارتفاع متوسط الدخل السنوي للفرد بوحدة نقدية واحدة يؤدي إلى ارتفاع القدرة المتوسطة للاستهلاك في نفس الفترة ب 850 وحدة نقدية. الميل الحدي للاستهلاك طويل المدى في هذا النموذج يمكن قياسه حسب العلاقة المشار إليها أعلاه: $B = \frac{0,85}{1 - 0,1} = 0,944$.

هذا يعني أنه في المدى الطويل، زيادة الدخل المتوسط السنوي للفرد بوحدة نقدية واحدة يؤدي إلى زيادة حجم الاستهلاك في المتوسط ب

944 وحدة نقدية. أما في الفترة (t+ 1) مثلا، فإن الميل الحدي للاستهلاك يساوي: 0,934 = (0,1 . 0,85 + 0,85) . أي أن ارتفاع الدخل بوحدة نقدية واحدة في الفترة الحالية (t) يؤدي إلى ارتفاع متوسط الاستهلاك في الفترة الموالية لها مباشرة (t+1) بمقدار 935 و.ن.

هـ – تقدير النموذج ذاتي الانحدار:

عند تقدير النماذج ذاتية الانحدار يصادف الباحث مشكلتين أساسيتين: الأولى تتعلق باختيار طريقة تقدير معاملات معادلة الانحدار الذاتي. إن وجود قيم ذات فترات إبطاء للمتغير التابع y_{t-1} في الطرف الأيمن من المعادلة يؤدي إلى الإخلال بأحد افتراضات طريقة المربعات الصغرى التي تنص على ضرورة تمييز وتصنيف متغيرات النموذج الانحداري إلى متغير تابع y_t يكون موجودا في الطرف الأيسر من المعادلة ومتغيرات مستقلة x_t – في الطرف الأيمن. المسألة الثانية لها صلة بعلاقة المتغير التابع بحدود الخطأ. مادام أن النموذج ذاتي الانحدار يعكس بصفة واضحة العلاقة بين القيمة الحالية للمتغير التابع (y_t) والقيمة الحالية لحد الخطأ(ε_t)، فإنه من البديهي أن تكون هناك علاقة ارتباطيه أيضا بين قيم السلسلتين (ε_{t-1}) و (y_{t-1}) .إن وجود هذه العلاقة يعني الإخلال بفرضية أخرى من فرضيات طريقة المربعات الصغرى الخاصة بضرورة غياب العلاقة بين المتغيرات التابعة، التي تلعب دور المتغير المستقل، وحدود الخطأ في معادلة الانحدار. لذلك فإن استعمال طريقة المربعات الصغرى العادية في حساب قيمة معاملات نموذج الانحدار الذاتي يؤدي إلى الحصول على تقديرات مزدوجة المعنى ومتحيزة لمعاملات (y_{t-1}) (معاملات المتغير التابع الموجود في الطرف الأيمن من المعادلة). من أجل

تجاوز هذه العقبة يتم اللجوء إلى استعمال طرق أخرى لتقدير قيم معاملات معادلة الانحدار الذاتي. من أهم هذه الطرق هي طريقة المتغيرات المساعدة (الوسيطية).

محتوى هذه الطريقة يتمثل في استبدال المتغير التابع، ذو فترة الإبطاء، الموجود في الطرف الأيمن من المعادلة والذي يتسبب في الإخلال بأحد شروط المربعات الصغرى، بمتغير جديد الذي إذا ما تم دمجه في النموذج لا يؤدي إلى مخالفة هذه الشروط. بعبارة أخرى، يجب التخلص من المتغير (y_{t-L}) من الطرف الأيمن لمعادلة الانحدار الذاتي. المتغير الجديد الذي يتعين إحلاله في مكان y_{t-L} يلزم أن تتوفر فيه خاصيتين أساسيتين: أولاهما، يجب أن يكون ذو علاقة ارتباطيه قوية بالمتغير الذي يحل محله وهو (y_{t-L}) وثانيهما لا يجب أن يكون مرتبطا بحد الخطأ (ε_t). توجد عدة طرق للحصول على مثل هذه المتغيرات المساعدة. لقد أشرنا سابقا أن الشكل العام للنموذج ذاتي الانحدار هو: $y_t = a + b_0.x_t + c_1.y_{t-1} + \varepsilon_t$. هذا الشكل يوضح أن المتغير التابع y_t مرتبط ليس فقط بالمتغير y_{t-1} ولكن بالمتغير x_t أيضا . بناءا على ذلك يمكن الافتراض أن (y_{t-1})مرتبط بدوره ب (x_{t-1}). أي أن:
$y_{t-1} = d_0 + d_1.x_{t-1} + u_t$. من هنا فإن المتغير (y_{t-1}) يمكن التعبير عنه أيضا من خلال العلاقة: $y_{t-1} = \hat{y}_{t-1} + u_t$ ، وبالتالي فإن: $\hat{y}_{t-1} = d_0 + d_1.x_{t-1}$. معاملات هذه المعادلة يمكن تقديرها بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية. قيمة ($\hat{y}_{t-1}$) المحصل عليها بهذه الطريقة يمكن أن تلعب دور المتغير الوسيط (المساعد) المعوض للمتغير (y_{t-1}) في نموذج الانحدار الأصلي. إن المتغير ($\hat{y}_{t-1}$) يتميز بأن له ارتباطا قويا بالمتغير (y_{t-1}) من

جهة ولا يخل بشرط المربعات الصغرى المتمثل في غياب العلاقة بينه وبين حد الخطأ من جهة أخرى. بتعويض قيمة (x_{t-1}) في المعادلة $\hat{y}_{t-1} = d_0 + d_1.x_{t-1}$ ، نحصل على قيمة $\hat{y}_{t-1}$ المقدرة. بالاعتماد على القيمة المقدرة لهذا المتغير المساعد يمكن تقدير معاملات نموذج الانحدار الذاتي الأصلي، الذي يأخذ الشكل: $y_t = a + b_0.x_t + c_1.\hat{y}_{t-1} + \varepsilon_t$.

- اختبار الارتباط الذاتي لحدود الخطأ في نموذج الانحدار الذاتي:

من أجل تقييم المعنوية الإحصائية للنماذج ذاتية الانحدار، يجب الأخذ بعين الاعتبار خصوصية اختبار مثل هذه النماذج لوجود الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ. لقد أشرنا سابقا، عندما تعرضنا لنماذج الانحدار العادية، أن اختبار فرضية وجود الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ للنموذج ذاتي الانحدار لا يمكن تحقيقها باستعمال مقياس (Durbin-Watson) في صورته المشار إليها سابقا. إن هذا راجع إلى أن استعمال هذا المقياس يتطلب الالتزام الصارم بشرط المربعات الصغرى وهو ضرورة التمييز الواضح بين متغيرات النموذج الانحداري: متغيرات مستقلة تكون موجودة في الطرف الأيمن وتابعة — في الطرف الأيسر. لكن في حالة وجود متغيرات تابعة ذات فترات إبطاء (y_{t-L}) في الطرف الأيمن من معادلة الانحدار يعني الإخلال بهذا الشرط. عندئذ تكون القيمة الفعلية لمقياس(D-W) يساوي تقريبا" 2" في حالة وجود الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ وفي حالة عدم وجوده أيضا.

من أجل اختبار فرضية وجود الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ في نموذج الانحدار الذاتي، اقترح (Durbin) استعمال مقياس آخر يسمى

بمقياس (h– Durbin) . يتم حساب قيمة هذا المقياس حسب العلاقة

التالية: $h = (1 - \frac{d_{reel}}{2}) . \sqrt{\frac{n}{1 - n . v}}$. حيث أن :

d_{reel} – القيمة الفعلية لمقياس (D-W) لنموذج الانحدار الذاتي.

n – عدد المشاهدات في سلسلة المعطيات.

v - تباين خطأ معامل المتغير التابع ذو فترة الإبطاء (y_{t-1}) (بمعنى مربع الخطأ المعياري لمعامل هذا المتغير أي: $v = m_b^2 = S.E_b^2$) .

من أجل اختبار فرضية (h_0) حول وجود الارتباط الذاتي يمكن إما مقارنة القيم الفعلية (المحسوبة) لمقياس (h) بقيمه الجدولية، أو اتخاذ القرار حسب القواعد التالية:

- إذا كان $h > 1,96$، فإن الفرضية (h_0) حول غياب الارتباط الذاتي الموجب لحدود الخطأ ترفض.

- إذا كان $h < - 1,96$، ترفض الفرضية (h_0) حول غياب الارتباط الذاتي السالب لحدود الخطأ.

- إذا كان $- 1,96 < h < 1,96$ ، يتم قبول الفرضية (h_0) حول غياب الارتباط الذاتي لحدود الخطأ في النموذج.

يجب الملاحظة هنا أن حساب قيمة هذا المقياس تكون ممكنة عندما تكون قيمة(n.v) أصغر من "1" ($n.v < 1$) . أما إذا كانت هذه القيمة على خلاف ذلك، فعادة ما يستعمل مقياس (D-W) العادي.

IV-2- تطبيقات

مثـــــال 1:

البيانات التالية خاصة بكميات الطاقة الكهربائية المستهلكة في إحدى المدن خلال 16 ثلاثي كالتالي:

السنة	رقم الثلاثي			
	1	2	3	4
1	6	4,4	5	9
2	7,2	4,8	6	10
3	8	5,6	6,4	11
4	9	6,6	7	10,8

المطلوب:

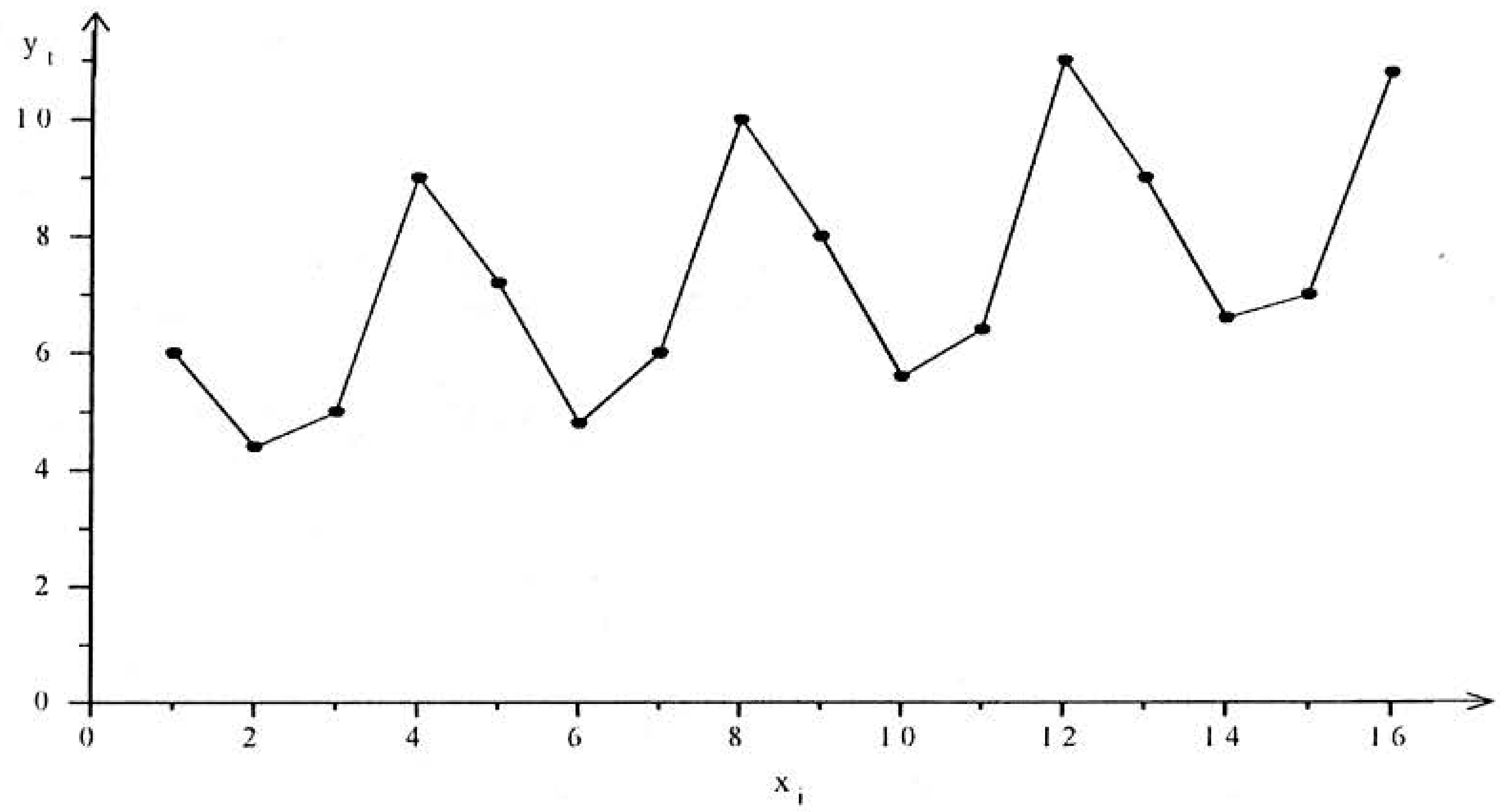
أ - تحليل هيكل هذه السلسلة الزمنية باستعمال معاملات الارتباط الذاتي ومنحنى الارتباط الذاتي.

ب – تكوين النموذج الجمعي أو الجدائي لها.

ج – إجراء تقدير لكمية الطاقة الكهربائية المتوقع استهلاكها خلال الفصل الأول والثاني من السنة الخامسة.

الحـــل :

أ – من أجل تحليل هيكل السلسلة الزمنية المعطاة وحساب معاملات الارتباط الذاتي من المراتب المختلفة نقوم أولا بإعداد منحنى القيم الفعلية لهذه السلسلة.



ثم نعد الجدول التالي:

t	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}
1	6	-	-	-	-
2	4,4	6	-	-	-
3	5	4,4	6	-	-
4	9	5	4,4	6	-
5	7,2	9	5	4,4	6
6	4,8	7,2	9	5	4,4
7	6	4,8	7,2	9	5
8	10	6	4,8	7,2	9
9	8	10	6	4,8	7,2
10	5,6	8	10	6	4,8
11	6,4	5,6	8	10	6
12	11	6,4	5,6	8	10
13	9	11	6,4	5,6	8
14	6,6	9	11	6,4	5,6
15	7	6,6	9	11	6,4
16	10,8	7	6,6	9	11

باستعمال العلاقات المشار إليها سابقا نحصل على قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى:

$$r_1 = \frac{\Sigma(y_t - \bar{y}_1).(\Sigma y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\Sigma(y_t - \bar{y}_1)^2 . \Sigma(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}} = 0,165$$

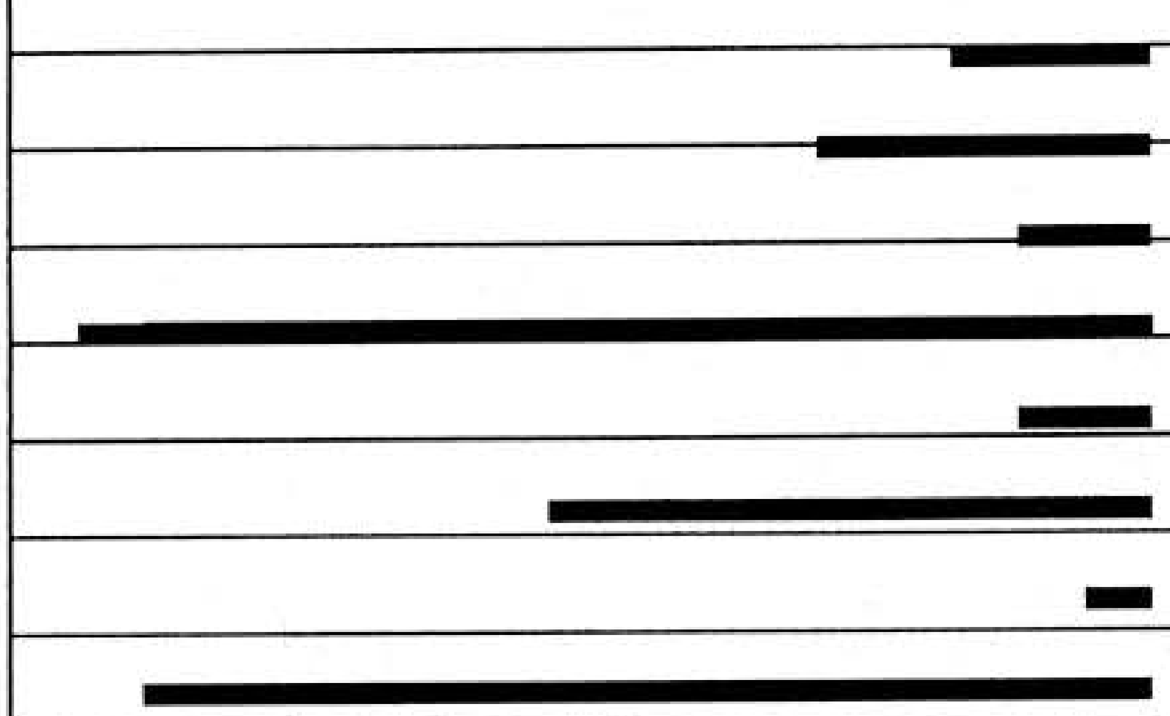
حيث أن :

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1} \quad , \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1}$$

هذه القيمة لـــ (r_1) تدل على ضعف العلاقة بين القيم الحالية (y_t) والقيم السابقة لها مباشرة (y_{t-1}) في السلسلة . لكن و كما نلاحظ من منحنى القيم الفعلية (y_t) فإن هيكل السلسلة يوضح بأن كل قيمة (y_t) مرتبطة بالقيم (y_{t-4}) و (t_{t-2}) . باستخراج قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الثانية $(r_2 = 0,567)$ نستطيع التعرف على طبيعة العلاقة الارتباطيه بين السلسلتين (y_t) و(y_{t-2}).

عند استكمال حساب جميع قيم معاملات الارتباط الذاتي ذات الرتب المختلفة نكون قد حصلنا على دالة و منحنى الارتباط الذاتي للسلسلة المذكورة.

الجدول التالي يوضح منحنى الارتباط الذاتي:

فترة الإبطاء	معاملات الارتباط الذاتي لقيم السلسلة	منحنى الارتباط الذاتي
1	$r_1 = 0,165154$	
2	$r_2 = 0,566873$	
3	$r_3 = 0,113558$	
4	$r_4 = 0,983025$	
5	$r_5 = 0,118711$	
6	$r_6 = 0,722046$	
7	$r_7 = 0,003367$	
8	$r_8 = 0,973848$	

تحليل قيم جدول منحنى الارتباط الذاتي لسلسلة استهلاك الطاقة الكهربائية يسمح باستنتاج وجود اتجاه عام خطي للسلسلة المذكورة وكذلك وجود تقلبات موسمية بتردد مقداره أربع ثلاثيات.
هذا الاستنتاج يؤكده أيضا تحليل هيكل منحنى القيم الفعلية للسلسلة السابق الإشارة إليه.

ب – تكوين النموذج الجمعي للسلسلة المعطاة:
تحليل هيكل هذه السلسلة الزمنية أوضح أنها تحتوي على تقلبات موسمية مداها أربع ثلاثيات. الكمية المستهلكة من الطاقة الكهربائية في فصل الخريف و الشتاء (الثلاثي I , VI) أكبر منها في فصل الربيع والصيف (الثلاثي II , III). حسب منحنى القيم الفعلية للسلسلة نستطيع أن نسجل وجود مدى متساوي تقريبا لكل التقلبات الموسمية في هذه السلسلة. إن هذا يثبت أن السلسلة المعطاة يناسبها تماما النموذج الجمعي. نقوم فيما يلي بحساب مكونات هذا النموذج:

1 – نبدأ بتعديل القيم الفعلية للسلسلة باستعمال طريقة المتوسطات المتحركة:
- نجمع قيم كل أربع حدود متتالية للسلسلة (قيم كل أربع ثلاثيات) مع التحرك أو الانتقال في كل مرة بفترة زمنية واحدة، فنحصل على كمية الطاقة الكهربائية المستهلكة في سنوات افتراضية.
- نقسم المجاميع المحصل عليها في الخطوة السابقة على 4 فنحصل على قيمة المتوسط المتحرك. نشير هنا إلى أن القيمة المعدلة المحصل عليها بهذه الطريقة قد أصبحت خالية من المكونات الموسمية.

- نعيد مطابقة القيم المحصل عليها (قيم المتوسطات) مع الفترات الزمنية الفعلية و ذلك بإيجاد متوسط كل قيمتين متتاليتين من قيم المتوسطات المتحركة مع التنقل بفترة زمنية واحدة في كل مرة. نحصل على إثر ذلك على قيم المتوسطات المتحركة الممركزة.

2 – نحسب قيم المكونات الموسمية وذلك بطرح قيم المتوسطات المتحركة الممركزة من القيم الفعلية لحدود السلسلة. نستخدم القيم المحصل عليها في استخراج قيم المعاملات الموسمية(S_i) وذلك بحساب متوسط قيم المكونات الموسمية لكل ثلاثي في كل السنوات.

في النماذج التي تحتوي على مكونات موسمية عادة ما يفترض أن التأثير الموسمي يلغي بعضه البعض خلال المدة الزمنية الكلية للسلسلة. في النموذج الجمعي هذا الافتراض يعني أن مجموع قيم المعاملات الموسمية لكل الثلاثيات يجب أن تساوي الصفر. في المثال الذي نحن بصدده نجد أن هذا المجموع $(0,6 - 1,9 - 1,275 + 2,708 = 0,075)$ لا يساوي الصفر. في هذه الحالة نضطر إلى استعمال معامل التصحيح كالتالي: $k = 0,075 / 4 = 0,01875$. ثم نعيد حساب المعاملات الموسمية (s_i) فنحصل على المعاملات الموسمية المصححة (حيث أن : $s_i = \bar{s}_i - k$).

بعد ذلك يصبح مجموع المعاملات الموسمية لكل الثلاثيات يساوي صفر: $(0,581-1,977 - 1,294 + 2,69 = 0)$.

رقم الثلاثي (t)	القيم الفعلية لكمية الطاقة الكهربائية المستهلكة(y_t)	المجموع خلال 4 ثلاثيات متحركة	المتوسط المتحرك خلال أربع ثلاثيات	المتوسط المتحرك الممركز	قيم المكونات الموسمية
1	6	-	-	-	-
2	4,4	24,4	6,10	-	-
3	5	25,6	6,40	6,25	-1,250
4	9	26	6,50	6,45	2,550
5	7,2	27	6,75	6,625	0,575
6	4,8	28	7,00	6,875	-2,075
7	6	28,8	7,20	7,1	-1,10
8	10	29,6	7,40	7,3	2,7
9	8	30	7,50	7,45	0,55
10	5,6	31	7,75	7,625	-2,025
11	6,4	32	8	7,875	-1,475
12	11	33	8,25	8,125	2,875
13	9	33,6	8,4	8,325	0,675
14	6,6	33,4	8,32	8,375	-1,775
15	7	-	-	-	-
16	10,8	-	-	-	-

المؤشر	السنة	رقم الثلاثي (i)			
		I	II	III	IV
قيم المكونات الموسمية	1	-	-	-1,25	2,55
	2	0,575	-2,075	-1,1	2,70
	3	0,55	-2,025	-1,475	2,875
	4	0,675	-1,775	-	-
مجموع قيم كل ثلاثي في كل السنوات	-	1,8	-5,875	-3,825	8,125
المعامل الموسمي $\overline{S}_i$	-	0,6	-1,958	-1,275	2,708
المعامل الموسمي المصحح (S_i)	-	0,581	-1,977	-1,294	2,69

3 – نتخلص من تأثير المكونات الموسمية وذلك بطرح قيم المعاملات الموسمية (S_i) من القيم الفعلية للسلسلة (y_t): $(y_t - S_i = T + A)$. هذه القيم تحسب لكل فترة زمنية من فترات السلسلة وهي تحتوي على مكونات الاتجاه العام (T) والتغيرات العشوائية (A) فقط.

4 – نحسب المكون $\hat{T}$ وهو عبارة عن القيم التقديرية للنموذج الجمعي وذلك بإجراء تعديل قيم السلسلة $(T + A)$ باستعمال نموذج الانحدار الخطي (الدالة التحليلية الخطية).

نقل قيم المعاملات الموسمية (S_i) المحصل عليها إلى جدول جديد ونضعها أمام الثلاثيات المناسبة لها في كل سنة.

t	y_t	S_i	$T+A= y_t - S_i$	T	T+S	$A = y_t - (T+S_i)$	A^2
1	6	0,581	5,419	5,902	6,483	- 0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,337	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004
4	9	2,69	6,31	6,461	9,151	- 0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	- 0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	- 0,057	0,0032
7	6	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10	2,69	7,31	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,58	5,603	- 0,03	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	7,766	6,472	- 0,072	0,0052
12	11	2,69	8,31	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9	0,581	8,419	8,139	8,72	0,28	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7,0	-1,294	8,294	8,519	7,218	0,218	0,0475
16	10,8	2,69	8,11	8,698	11,388	- 0,588	0,3457

نحصل بعدها على النتائج التالية :

المعامل الحر للنموذج (a) = 5,715496.

معامل الانحدار (b) = 0,186421.

معامل التحديد (R^2) = 0,914971.

قيمة الخطأ المعياري لـــ(b) هو m_b ($S.E_b$) = 0,015188.

عدد المشاهدات (n) = 16 .

عدد درجات الحرية (n + m - 1 = 1) .

معادلة الاتجاه العام (المعادلة التقديرية) للسلسلة الزمنية هي:

$\hat{T} = 5{,}715 + 0{,}186t$. عندما نعوض (t) في هذه المعادلة بقيمها (t= 1,2....,n) نحصل على القيم التقديرية (T) المقابلة لكل فترة زمنية (t).

5 – نستخرج الآن القيم التقديرية للسلسلة الزمنية باستعمال النموذج الجمعي المحصل عليه، وذلك بإضافة قيم (T) إلى قيم المعاملات الموسمية (S_i) لكل ثلاثي ، نحصل بعدها على قيم($\hat{T} + S$).

6 – آخر مرحلة في تكوين النموذج الجمعي للسلسلة الزمنية هو حساب الخطأ المطلق (A) كالتالي : $A = y_t - (T + S)$.

بنفس المنهج المتبع في نماذج الانحدار، من أجل تقييم جودة النموذج الجمعي المقدر واختبار المعادلة الأحسن تمثيلا له، يمكن استعمال مجموع مربعات الأخطاء المطلقة (ΣA^2). بالنسبة للنموذج الجمعي الذي نحن بصدده ، مجموع مربعات الأخطاء المطلقة هو $\Sigma A^2 = 1{,}1$. إذا ما قارنا هذه القيمة بقيمة مجموع مربعات انحراف القيم الفعلية عن وسطها الحسابي [$\Sigma(y_t - \bar{y})^2 = 71{,}59$] فإن النتيجة المحصل عليها تساوي تقريبا ($1{,}1 / 71{,}59 = 1{,}5\%$) . هذا يدل على أن النموذج الجمعي المحصل عليه يفسر حوالي 99% $\left(\sqrt{1-\frac{1{,}1}{71{,}59}}\right)$ من تشتت حدود السلسلة الزمنية الخاصة باستهلاك الطاقة الكهربائية خلال 16 ثلاثي.

ج – تقدير كمية الطاقة الكهربائية المتوقع استهلاكها :

كمية الطاقة الكهربائية المتوقع استهلاكها في الثلاثي الأول و الثاني من السنة الخامسة هي: ($\hat{T}_{18}$, $\hat{T}_{17}$) .

من أجل الحصول على هذه القيم التقديرية نستعمل معادلة الانحدار التقديرية الممثلة للاتجاه العام للسلسلة الزمنية وهي: $\hat{T} = 5,715 + 0,186t$ ، فنحصل على القيم التالية:

$$\hat{T}_{18} = 9,063 \text{ ، } \hat{T}_{17} = 5,715 + 0,186\,(17) = 8,877$$

هذه الكميات هي قيم مكونات الاتجاه العام فقط في القيم التقديرية للسلسلة الزمنية. من أجل الحصول على القيم الكلية التقديرية حسب النموذج الجمعي يجب أن نضيف إلى الكميات المحصل عليها قيم المعاملات الموسمية (S_i) للفصل الأول والثاني: $(\hat{T} + S)_{17} = 8,877 + 0,581 = 9,458$ و$7,086 = 9,063 - 1,977 = (\hat{T} + S)_{18}$. تكون كميات الطاقة الكهربائية المتوقع استهلاكها في النصف الأول من السنة الخامسة هي: $9,458 + 7,086 = 16,544$.

مثـــــال 2 :

الجدول التالي يحتوي على قيم مبالغ أرباح شركة ما خلال 16 ثلاثي كالتالي :

السنة	الـثـــلاثـــي			
	I	II	III	IV
1	72	100	90	64
2	70	92	80	58
3	62	80	68	48
4	52	60	50	30

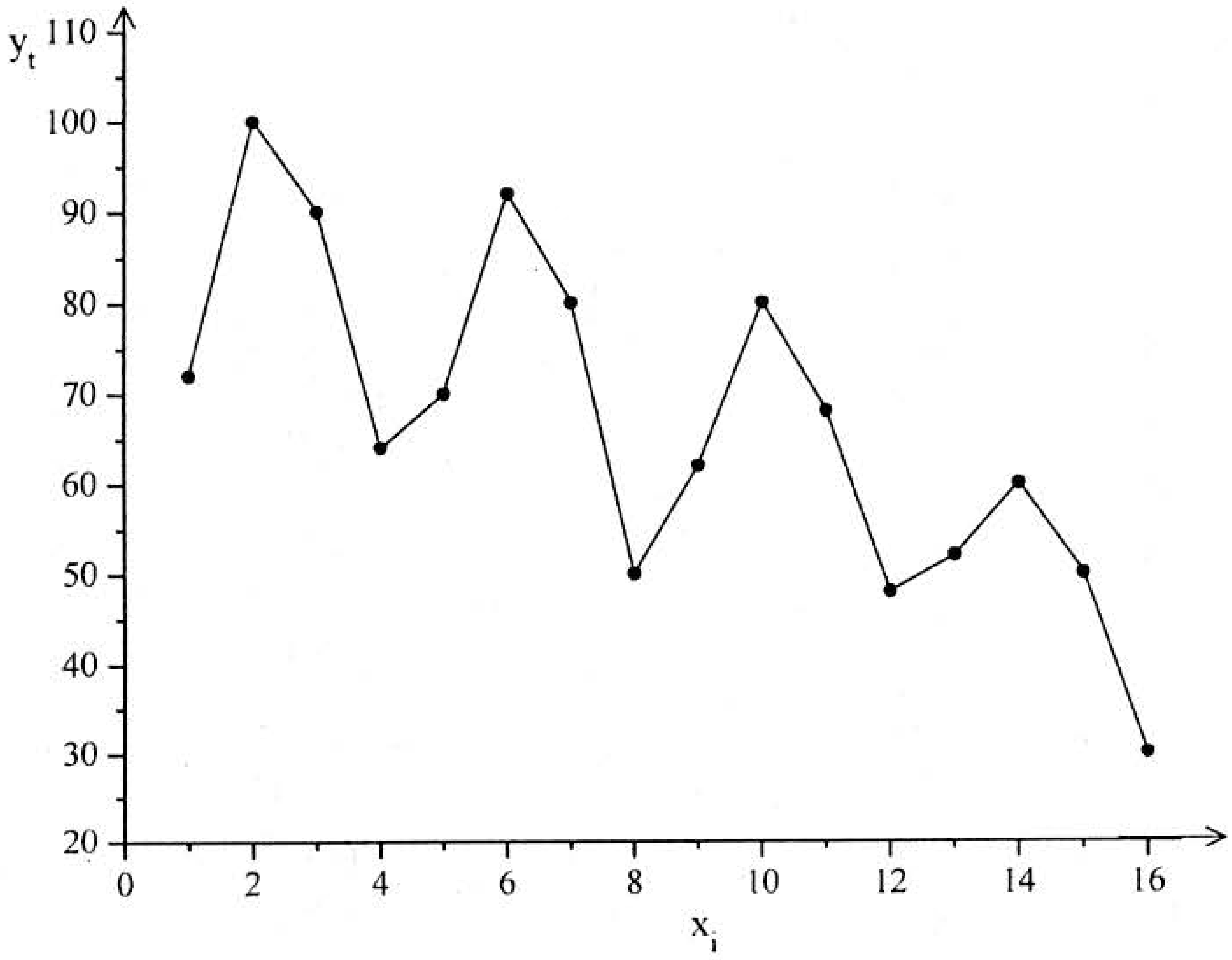
المطلـــوب:

أ – حلل هيكل هذه السلسلة الزمنية و كون النموذج الجمعي أو الجدائي المناسب لها.

ب – أجري تقديرا لأرباح الشركة المتوقعة خلال النصف الأول من السنة الموالية مباشرة (السنة الخامسة).

الحــــــل:

نقوم أولا برسم منحنى القيم الفعلية للسلسلة المعطاة :



هذا المنحنى يشير إلى وجود تقلبات موسمية مدى كل واحد منها أربع ثلاثيات، كما يشير أيضا إلى وجود اتجاه عام متناقص للسلسلة. أرباح الشركة في فترة الربيع والصيف أعلى منها في الخريف والشتاء. في المنحنى نلاحظ أيضا انخفاض سعة (قمة ذروة) التقلبات الموسمية وهذا يسمح لنا بافتراض تمثيل هذه السلسلة بواسطة نموذج جدائي. من أجل حساب مكوناته نتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في حالة النموذج الجمعي.

1 – نقوم بتعديل قيم الحدود الفعلية للسلسلة الزمنية بواسطة المتوسطات المتحركة تماما كما في حالة النموذج الجمعي.

رقم الثلاثي (t)	القيم الفعلية للأرباح(y_t)	المجموع خلال أربع ثلاثيات متحركة	المتوسط المتحرك خلال 4 ثلاثيات	المتوسط المتحرك الممركز	قيمة المكونات الموسمية
1	72	-	-	-	-
2	100	326	81,5	-	-
3	90	324	81,0	81,25	1,108
4	64	316	75,0	80	0,8
5	70	306	79,0	77,75	0,9
6	92	300	76,5	75,75	1,215
7	80	292	75,0	74,0	1,081
8	58	280	73,0	71,5	0,811
9	62	268	70,0	68,5	0,905
10	80	258	67,0	65,75	1,217
11	68	248	64,5	63,25	1,075
12	48	228	57,0	59,5	0,807
13	52	210	52,5	54,75	0,95
14	60	192	48,0	50,25	1,194
15	50	-	-	-	-
16	30	-	-	-	-

2– نحسب قيم المكونات الموسمية بقسمة القيم الفعلية للسلسلة على قيم المتوسطات المركزة. نستعمل هذه المقادير في استخراج قيم المعاملات الموسمية (S_i) وذلك بحساب متوسط قيم المكونات الموسمية لكل ثلاثي لكل السنوات.

المؤشر	السنة	رقم الثلاثي			
		I	II	III	IV
قيمة المكونات الموسمية	1	-	-	1,108	0,8
	2	0,9	1,215	1,081	0,817
	3	0,905	1,217	1,075	0,807
	4	0,95	1,194	-	-
المجموع خلال الثلاثي في كل سنة	-	2,755	3,626	3,264	2,424
المعامل الموسمي $\bar{S}_i$	-	0,918	1,209	1,088	0,808
المعامل الموسمي المصحح(S_i)	-	0,913	1,202	1,082	0,803

إن إلغاء التأثيرات الموسمية لبعضها البعض في النموذج الجدائي تنعكس في أن حاصل جمع قيم المعاملات الموسمية خلال كل الثلاثيات يجب أن يساوي عدد الفترات الزمنية في الدورة الموسمية الواحدة وهي في هذه الحالة 4. أي : $0,918 + 1,209 + 1,088 + 0,808 + = 4,023$

ما دام أن نتيجة الجمع هي أكبر من 4 فنلجأ إلى استعمال معامل التصحيح كالتالي: $K = 4 / 4,023 = 0,9943$.

نعيد حساب المعاملات الموسمية (S_i) باستعمال معامل التصحيح K فنحصل على المكونات الموسمية المصححة، حيث أن ($S_i = \bar{S}_i \ .K$) .

عندئذ يصبح مجموع المعاملات الموسمية يساوي 4:

$(0,913 + 1,202 + 1,082 + 0,803 = 4)$.

ننقل قيم المعاملات الموسمية المصححة إلى جدول جديد ونضعها أمام الفترات الزمنية المناسبة لها.

3 – نقسم كل قيمة فعلية للسلسلة الزمنية (y_t) على قيمة المعامل الموسمي (S_i) المقابلة لها، نحصل على قيم (T.E) : $T.E = y_t / S_i$ التي تحتوي على مكونات الاتجاه العام والتقلبات العشوائية فقط.

4 – نستخرج قيم المكون($\hat{T}$) (القيم التقديرية) في النموذج الجدائي وذلك بتعديل قيم السلسلة (T.E) باستعمال نموذج الانحدار الخطي الممثل للاتجاه العام للسلسلة المدروسة. خصائص هذا النموذج الانحداري الخطي هي:

المعامل الحر (a) : 90,585150

معامل الانحدار (b) :2,773250 -

معامل التحديد $R^2 = 0{,}915239$.

قيمة الخطأ المعياري ل(b) = 0,225556.

عدد المشاهدات (n) = 16.

عدد درجات الحرية (n - m -1) = 14 .

معادلة الانحدار المقدرة الممثلة للاتجاه العام للسلسلة هي: $\hat{T} = 90{,}59 - 2{,}773.t$. بتعويض (t) بقيمها في هذه المعادلة نحصل على القيم التقديرية ($\hat{T}$) المقابلة لكل فترة زمنية.

5- نستخرج الآن قيم السلسلة الزمنية حسب النموذج الجدائي وذلك بضرب قيم($\hat{T}$) في قيم المعاملات الموسمية (S_i) للثلاثيات المقابلة لها فنحصل على قيم (T.S) المقدرة.

6 – حساب الخطأ المطلق بين القيم التقديرية للسلسلة (T.S) والقيم الفعلية (y_t) كالتالي: $A = y_t - (T. S)$. مجموع مربعات الأخطاء المطلقة (ΣA^2) في النموذج الجدائي المقترح تساوي (207,40).

مجموع مربعات انحراف القيم الفعلية للسلسلة عن وسطها الحسابي تساوي $\Sigma (y_t - \bar{y})^2 = 5023$. من هنا نلاحظ أن النموذج الجدائي المقترح يفسر 95,9% من تشتت قيم السلسلة الزمنية المدروسة $\left(\sqrt{1-\frac{207,4}{5023}}\right)$.

t	y_t	S_i	T.E = y_t / S_i	T	T.S	A = y_t - (T.S)	A^2
1	72	0,913	78,86	87,8	80,16	- 8,16	66,66
2	100	1,202	83,19	85,03	102,2	- 2,20	4,86
3	90	1,082	83,18	82,25	89,00	1,00	1,00
4	64	0,803	79,70	79,48	63,82	0,18	0,03
5	70	0,913	76,67	76,7	70,03	- 0,03	0,00
6	92	1,202	76,54	73,93	8,86	3,14	9,85
7	80	1,082	73,94	71,15	76,99	3,01	9,08
8	58	0,803	72,23	68,38	54,91	3,09	9,57
9	62	0,913	67,91	65,6	59,9	2,1	4,43
10	80	1,202	66,56	62,83	75,52	4,48	20,08
11	68	1,082	62,85	60,05	64,98	3,02	9,14
12	48	0,803	59,78	57,28	45,99	2,01	4,03
13	52	0,913	56,96	54,5	49,76	2,24	5,02
14	60	1,202	49,92	51,73	62,18	- 2,18	4,73
15	50	1,082	46,21	48,95	52,97	- 2,97	8,79
16	30	0,803	37,36	46,18	37,08	- 7,08	50,12

ب – قيمة الأرباح المقدرة أو المتوقعة في النصف الأول من السنة الخامسة نحصل عليها كمجموع للأرباح التي سوف تحصل عليها الشركة خلال الثلاثي الأول و الثاني للسنة الخامسة أي مجموع ($\hat{T}_{17}$) و ($\hat{T}_{18}$). من أجل الحصول على هذه المقادير نستعمل معادلة انحدار

الاتجاه العام المحصل عليها سابقا: $\hat{T} = 90,59-2,773t$. فنحصـــل على:

$\hat{T}_{18} = 90,59-2,773(18) = 40,626$ و $\hat{T}_{17} = 90,59-2,773.(17) = 43,401$.

لكن بما أن معادلة الانحدار لا تعطينا إلا الجزء المكون للاتجاه العام من قيمة السلسلة، فإنه من أجل الحصول على قيمة الأرباح الكلية المتوقعة حسب النموذج الجدائي يجب أن نضيف إلى القيم التقديرية السابقة المعاملات الموسمية للفصل الأول و الثاني كالتالي :

$$(T.S)_{17} = T_{17} . S_1 = 43,401 . 0,913 = 39 ,626$$

$$(T.S)_{18} = T_{18} . S_2 = 40,626 . 1,202 = 48,832$$

وتكون مجموع الأرباح المتوقعة للشركة في النصف الأول من السنة الخامسة هو:

$$. 39,626 + 48,892 = 88,458$$

مثال 3 :

لتكن المعطيات الافتراضية التالية الخاصة بالإنفاق على الاستهلاك (y_t) بالوحدات النقدية خلال 8 سنوات كالتالي :

الزمن(t)	1	2	3	4	5	6	7	8
الإنفاق على الاستهلاك (y_t)	7	8	8	10	11	12	14	16

المطلـــوب:

حساب معامل الارتباط الذاتي بين قيم هذه السلسلة.

الحـــل:

نفترض أن الإنفاق على الاستهلاك في السنة الجارية يعتمد على الإنفاق على الاستهلاك في السنوات الماضية. نستطيع إذن إن نحسب معامل الارتباط الذاتي بين القيم (y_t) و (y_{t-1}) ، الشيء الذي يسمح

لنا بقياس متانة العلاقة بين الإنفاق على الاستهلاك للسنة الجارية والسنة التي سبقتها.

من أجل حساب قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى (r_1) نعد الجدول التالي:

t	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{y}_1$	$y_{t-1} - \bar{y}_2$	$(y_t - \bar{y}_1).(y_{t-1} - \bar{y}_2)$	$(y_t - \bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	7	-3,29	-3	9,87	10,8241	9
3	8	8	-3,29	-2	6,58	10,8241	4
4	10	8	-1,29	-2	2,58	1,6641	4
5	11	10	-0,29	0	0,00	0,0841	0
6	12	11	0,71	1	0,71	0,5041	1
7	14	12	2,71	2	5,42	7,3441	4
8	16	14	4,71	4	18,4	22,1841	16
Σ	86	70	0	0	44	53,4287	38

$$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1} = \frac{79}{7} = 11,29$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1} = \frac{70}{7} = 10$$

$$r_1 = \frac{\Sigma(y_t - \bar{y}_1).(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\Sigma(y_t - \bar{y}_1)^2 . \Sigma(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}} = \frac{44}{\sqrt{53,43.38}}$$

$$r_1 = 0,976$$

هذه القيمة لمعامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى المحصل عليها تشير إلى وجود علاقة ارتباطية قوية بين النفقات الاستهلاكية للسنة الجارية والسنة السابقة لها مباشرة، هذا بدوره يدل على وجود اتجاه خطي عام قوي للسلسلة محل الدراسة.

نعد الآن الجدول التالي الذي يمكننا من حساب قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الثانية (r_2).

t	y_t	y_{t-2}	$y_t - \bar{y}_3$	$y_{t-2} - \bar{y}_4$	$(y_t - \bar{y}_3).(y_{t-2} - \bar{y}_4)$	$(y_t - \bar{y}_3)^2$	$(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	-	-	-	-	-	-
3	8	7	-3,83	-2,33	8,9239	14,6689	5,4289
4	10	8	-1,83	-1,33	2,4339	3,3489	1,7689
5	11	8	-0,83	-1,33	1,1039	0,6889	1,7689
6	12	10	0,17	0,67	0,1139	0,0289	0,4489
7	14	11	2,17	1,67	3,6239	4,7089	2,7889
8	16	12	4,17	2,67	11,1339	17,3889	7,1289
Σ	86	56	0	0	27,3334	40,8334	19,3334

$$\bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-2} = \frac{71}{6} = 11,83 \quad , \quad \bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}}{n-2} = \frac{56}{6} = 9,33$$

$$r_2 = \frac{\Sigma(y_t - \bar{y}_3).(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\Sigma(y_t - \bar{y}_3)^2 . \Sigma(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}} = \frac{27,3334}{\sqrt{40,334 . 19,3334}} = 0,973$$

النتيجة المحصل عليها تؤكد مرة أخرى أن سلسلة الإنفاق على الاستهلاك هي ذات اتجاه عام خطي.

مثـــال 4:

فيما يلي البيانات الشهرية لمعدل نمو الأجور في بلد ما خلال 10 أشهر في سنة 1999 (بالنسبة إلى سنة 1998) .

الشهر (t)	معدل نمو الأجور الشهرية (y_t)		الشهر (t)	معدل نمو الأجور الشهرية (y_t)
1	82,9		6	121,6
2	87,3		7	118,6
3	99,4		8	114,1
4	104,8		9	123
5	107,2		10	127,3

المطلـــوب:

اختيار أحسن دالة تحليلية تمثل الاتجاه العام لتطور الأجور خلال سنة 1999 و حساب معاملاتها.

الحـــل:

بعد رسم أزواج القيم (t) و (y_t) يظهر أن لهذه السلسلة اتجاه عام في شكل خطي. لمزيد من التحليل و التدقيق في اختيار معادلة التمثيل المثلى نقوم بحساب معاملات معادلات التمثيل الأقرب إلى شكل الاتجاه العام الخطي المحصل عليه. نتائج هذا الحساب معطاة في الجدول أدناه.

قيمة معامل التحديد R^2	شكل معادلة التمثيل	قيمة معامل التحديد R^2	شكل معادلة التمثيل
0,872	$\hat{y}_t = 83,93\ .1,046^t$	0,887	$\hat{y}_t = 82,66 + 4,72.t$
0,758	$\hat{y}_t = 122,57 - \dfrac{47,63}{t}$	0,937	$\hat{y}_t = 72,9 + 9,6t - 0,44.t^2$
		0,939	$\hat{y}t = e4,39\ .\ t0,193$

حسب المعطيات الواردة في الجدول نلاحظ أن الدالة التحليلية التي تمثل الاتجاه الهام لتطور السلسلة أحسن تمثيل هي الدالة الأسية التي تقابلها أكبر قيمة لمعامل التحديد (R^2) وليس الدالة الخطية.

مثـــال 5 :

لتكن نفس المعطيات الواردة في المثال 3، الخاصة بالإنفاق على الاستهلاك. نضيف إلى هذه المعطيات البيانات الخاصة بالدخل القابل للإنفاق على الاستهلاك خلال 8 سنوات كما في الجدول أدناه:

المؤشر	الزمن(t)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
الإنفاق على الاستهلاك(y_t)	7	8	8	10	11	12	14	16
الدخل (x_t)	10	12	11	152	14	15	17	20

المطلـــوب:

تقييم قوة و متانة العلاقة بين السلسلتين الزمنيتين الخاصتين بالإنفاق على الاستهلاك (y_t) و الدخل (x_t) .

الحــــــل:

إذا افترضنا أن نموذج الانحدار الممثل للعلاقة بين المؤشر الناتج(y_t) والمؤشر المستقل (x_t) هو نموذج خطي من الشكل: $y_t = a + b.x_t + \varepsilon_t$

فإن نتيجة تحليل الانحدار والارتباط تعطينا الشكل المقدر لهذا النموذج كالتالي:

المعادلة التقديرية: $\hat{y}_t = -2{,}05 + 0{,}92.x_t$

معامل الارتباط (r_{yx}) : $r_{xy}= 0{,}982$

معامل التحديد (R^2) : $r^2_{xy}= 0{,}965$

إن القيمة المرتفعة لمعامل الارتباط تدل على وجود علاقة قوية ومتينة بين الإنفاق الاستهلاكي (y_t) ومستوى الدخل (X_t) بينما القيمة الكبيرة لمعامل التحديد فتدل على أن معادلة الانحدار موضوعية وأن 96% من التغيرات في مستوى الإنفاق على الاستهلاك يسببها التغير في الدخل. لكن هذا الاستنتاج يمكن أن يكون غير صحيح (مغلوط) ولا يعطي صورة واقعية عن طبيعة العلاقة بين المؤشرين المذكورين. فارتفاع قيمة معامل الارتباط كما أشرنا سابقا، يمكن أن تكون ناتجة عن كون أن كلا المؤشرين تابعين للزمن(t). بمعنى يحتويان على اتجاه عام.

كما رأينا في المثال 3، معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لسلسلة الإنفاق على الاستهلاك (y_t) كان يساوي $(r_1{}^y = 0{,}976)$. يمكن أيضا حساب معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لسلسلة الدخل x_t $(r_1{}^x = 0{,}88)$. هذين القيمتين لمعاملي الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لكلا السلسلتين الزمنيتين تدلان على أن لهذين السلسلتين اتجاه عام خطي. لذلك فإن النتيجة المحصل عليها للعلاقة الارتباطية بين المؤشرين (x_t) و(y_t) هي نتيجة مغلوطة بحكم احتواء كلا السلسلتين على اتجاه عام خطي.

من أجل التخلص وتحييد تأثير الاتجاه العام من كلا السلسلتين نستعمل طريقة الانحرافات عن الاتجاه العام. نتيجة تقدير المعاملات الانحدارية الخطية الخاصة بكل سلسلة معطاة في الجدول التالي:

السلسلة	الإنفاق على الاستهلاك	مستوى الدخل
المعامل الحر (a)	5,071428	8,035714
معامل الانحدار الخطي(b)	1,261904	1,297619
معامل التحديد (R^2)	0,962315	0,896611
عدد المشاهدات (n)	8	8
عدد درجات الحرية n+ m -1	6	6

معادلة الانحدار المقدرة للإنفاق على الاستهلاك هي: $\hat{y}_t = 5{,}07+1{,}26.t$، وللدخل هي: $\hat{x} = 8{,}04 +1{,}3.t$.

بعد حساب القيم التقديرية ($\hat{y}_t$) و($\hat{x}$) من المعادلتين السابقتين وكذلك الانحرافات عن الاتجاه العام (y_t- $\hat{y}_t$) و(x_t- $\hat{x}$) نحصل على القيم التالية (أنظر الجدول).

t	y_t	x_t	$\hat{y}_t$	$\hat{x}_t$	$\Delta_{yt} = y_t - \hat{y}_t$	$\Delta_{xt} = x_t - \hat{x}_t$
1	7	10	6,33	9,34	0,67	0,66
2	8	12	7,59	10,64	0,41	1,36
3	8	11	8,85	11,94	- 0,85	- 0,94
4	10	12	10,11	13,24	-,011	-1,24
5	11	14	11,37	14,54	- 0,37	- 0,54
6	12	15	12,63	15,84	- 0,63	- 0,84
7	14	17	13,89	17,14	0,11	- 0,14
8	16	20	15,15	18,44	0,85	1,56

نختبر الآن مستوى الارتباط الذاتي للانحرافات المحصل عليها. قيمة معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لانحرافات (y_t) عن الاتجاه العام $(r_1^{\Delta yt} = 0,129)$ ولـ (x_t) : $(r_1^{\Delta xt} = 0,254)$. هذه النتيجة تدل على أن مستوى الارتباط الذاتي بين سلسلتي الانحرافات (Δ_{yt}) و(Δ_{xt}) ضعيف ويمكن إهماله .

لذلك فإن سلسلتي الانحراف عن الاتجاه العام (Δ_{yt}) و(Δ_{xt}) يمكن استعمالهما من أجل الحصول على تقيم حقيقي لمتانة وقوة العلاقة بين القيم الأصلية (الفعلية) للسلسلتين (y_t)و (x_t). معامل الارتباط بين قيم سلسلتي الانحرافات (Δ_{yt}) و(Δ_{xt}) يساوي $(r_{\Delta x\Delta y} = 0,86)$. يمكن مقارنة هذه القيمة لمعامل ارتباط الانحرافات مع قيمة معامل ارتباط القيم الأصلية للسلسلتين (x_t) و(y_t) المحصل عليها سابقا $r_{xy}= 0,98$. هذين النتيجتين تؤكدان إذن بعضهما البعض وتسمحان باستنتاج أن العلاقة بين الإنفاق على الاستهلاك و مستوى الدخل هي فعلا علاقة ارتباطية متينة وقوية.

يمكن أن نشكل نموذج انحدار انحرافات المؤشر (y_t) على انحرافات المؤشر (x_t) : $\Delta_{\hat{y}t} = á + b'.\Delta_{xt}$. نتيجة تقدير هذا النموذج هي كالتالي:
$\Delta_{\hat{y}t} = 0{,}017 + 0{,}47.\ \Delta_{xt}$ ، مع قيمة معامل تحديد $R^2 = 0{,}74$.

يصعب إعطاء تفسير واضح لقيم معاملات هذا النموذج الانحداري، لكن يمكن في المقابل استعمالها في عمليات الاستطلاع وتقدير قيم مستقبلية. يتم حساب القيمة التقديرية للمتغير المستقل (x_t) عند الفترة الزمنية (t_p) في المستقبل وذلك باستعمال معادلة الانحدار الزمني لـــ (x_t). تحسب بعدها القيمة الفعلية (x_p) الموافقة لها عند نفس الفترة الزمنية (t_p). بعد ذلك تستخرج قيمة الانحراف$(\Delta_{xt} = x_p - \bar{x}_p)$. بالنسبة للمتغير التابع (y_t) نحسب القيمة التقديرية له $(\hat{y}_t)$ المناسبة لقيمة (x_t) المحصل عليها باستعمال معادلة الانحدار الزمني لـــ (y_t)، ثم تحسب قيمة (y_t) الفعلية من معادلة الانحدار للانحرافات $(\Delta_{yt} = a' + b'.\Delta_{xt})$. حيث أن: $(\Delta_{yt} = y_t - \hat{y}_t)$.

مثـــال 6:

نرجع إلى نفس معطيات المثال 5 ونستعمل طريقة الفروقات المتتالية في التخلص من مكونات الاتجاه العام.

الحـــل:

بعد حساب الفروقات الأولى بين القيم المتتالية لحدود السلسلتين الزمنيتين نكون الجدول التالي الذي يعطينا قيم هذه الفروقات:

t	y_t	x_t	$\Delta_t y$	$\Delta_t x$
1	7	10	-	-
2	8	12	1	2
3	8	11	0	-1
4	10	12	2	1
5	11	14	1	2
6	12	15	1	1
7	14	17	2	2
8	16	20	2	3

نجري حساب قيم معاملات الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لسلسلتي الفروقات الأولى ($\Delta_t x$) و($\Delta_t y$) فنحصل على القيم التالية: $r_1^{\Delta t\ y} = -0{,}109\ ,\ r_1^{\Delta t\ x} = -\ ,0156$. هذا يوضح أن السلسلتين ($\Delta_t y$) و($\Delta_t x$) لا تحتويان على الارتباط الذاتي أو أن مستوى الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى بين قيمهما ضعيف. مادام أن هذين السلسلتين لا تحتويان على الارتباط الذاتي (قيمهما خالية من تأثير عنصر الزمن t) فإننا نستطيع استعمالهما- عوض قيم السلسلتين الأصليتين — من أجل تقييم متانة العلاقة الارتباطية بين مستوى الدخل (x_t) والإنفاق على الاستهلاك (y_t).

معامل الارتباط بين قيم السلسلتين($\Delta_t y$) و($\Delta_t x$) يساوي ($r_{\Delta t\ x,\Delta t\ y}$ $= 0{,}717$). هذه النتيجة تؤكد الاستنتاج الذي توصلنا إليه سابقا باستعمال طريقة الانحرافات عن الاتجاه العام حول العلاقة الارتباطية القوية والمتينة بين (x_t) و(y_t). يمكن هنا أيضا تكوين نموذج انحدار قيم الفروقات الأولى لـــ (y_t) على قيم الفروقات الأولى لـــ (x_t)، أي: Δ_t

$\hat{y} = \acute{a} + b'\Delta_t x$ باستعمال بيانات هذين السلسلتين يكون الشكل المقدر لهذا النموذج كالتالي:، ومعامل التحديد (R^2) = 0,515.

على خلاف نموذج الانحدار المشكل باستعمال الانحرافات فإن نموذج الانحدار الناتج عن استعمال بيانات الفروقات المتتالية يمكن تفسيره بسهولة: تغير في الدخل بوحدة نقدية واحدة يؤدي إلى تغير الاستهلاك بـــ : 0,43 وحدة نقدية في نفس الاتجاه .

لكن بالرغم من بساطة هذه الطريقة فإنها تحتوي على بعض النقائص منها: استعمال هذه الطريقة يؤدي إلى انخفاض عدد أزواج المشاهدات التي تستعمل في تكوين نموذج الانحدار وهذا يؤدي إلى انخفاض عدد درجات الحرية. هذا بالإضافة إلى أن استعمال الزيادات أو معدل الزيادات في قيم السلاسل الزمنية عوض قيمها الأصلية يمكن أن يؤدي إلى فقدان القيمة الإحصائية الموجودة في القيم الأصلية.

مثـــال 7 :

نرجع إلى معطيات المثال 5 الخاصة بقيم الإنفاق على الاستهلاك (y_t) وقيم الدخل الشخصي الموجه للإنفاق على الاستهلاك (x_t). نريد الآن أن نقدر نموذج الانحدار (y_t) على(x_t) ثم اختبار فرضية وجود ارتباط ذاتي في هذا النموذج عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

الحـــل:

لقد اختبرنا في المثال 5 وجود الارتباط الذاتي بين حدود السلسلتين الزمنيتين (x_t) و(y_t) قبل استعمالهما في تكوين نموذج الانحدار وذلك باستعمال طريقتي الانحرافات عن الاتجاه العام والفروقات المتتالية. عندما اكتشفنا أن انحرافات قيم السلسلتين عن اتجاههما العام (Δy_t)

و(Δx_t) لا يحتويان على ارتباط ذاتي قمنا باستعمالهما في تكوين نموذج الانحدار الخطي ل(Δy_t) على (Δx_t) عوض استعمال القيم الأصلية للسلسلتين الزمنيتين.

أما الآن فنستعمل أولا القيم الأصلية للسلسلتين الزمنيتين (y_t) و (x_t) في تقدير نموذج الانحدار($y_t = a + b.x_t$). بعد ذلك نختبر وجود الارتباط الذاتي في النموذج المقدر عن طريق اختبار الارتباط الذاتي لحدود الخطأ(ε_t)لهذا النموذج.

لقد أشرنا سابقا عند حل المثال 5 ، أن النموذج الخطي لانحدار قيم (y_t) على (x_t) باستعمال القيم الأصلية لسلسلتي الدخل والإنفاق الاستهلاكي كان كالتالي: $\hat{y}_t = - 2,05 + 0,92 .x_t$.بمعامل ارتباط خطي($r = 0,982$) ومعامل تحديد ($R^2 = 0,965$) .

نقوم الآن بإعداد الجدول التالي الذي يسمح لنا بحساب مقياس (d_{reel}) واستعماله في اختبار وجود (أو عدم وجود) الارتباط الذاتي.

t	y_t	$\hat{y}_t$	$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	ε_t^2
1	7	7,15	- 0,15	-	-	0,0225
2	8	8,99	- 0,99	-0,84	0,7056	0,98
3	8	8,07	- 0,07	0,92	0,8464	0,0049
4	10	8,99	1,01	1,08	1,1664	1,02
5	11	10,83	0,17	-0,84	0,7056	0,0289
6	12	11,75	0,25	0,08	0,0064	0,0625
7	14	13,59	0,41	0,16	0,0256	0,1681
8	16	16,35	- 0,35	-0,76	0,5776	0,1225
					4,0336	2,4094

القيمة الفعلية لمقياس (d) تساوي:

$$d_{reel} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2} = \frac{4,0336}{2,4094} = 1,674$$

نطرح الفرضيات التالية:

H_0 = لا يوجد ارتباط ذاتي بين قيم ε_t.

H_1 = يوجد ارتباط ذاتي موجب بين قيم ε_t .

H_2 = يوجد ارتباط ذاتي سالب بين قيم ε_t .

نبحث الآن في جداول القيم الحرجة لمقياس (D-W) عن قيمتي (d_L) و(d_u) الموافقة لعدد المشاهدات ($n = 8$) وعدد المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار المقدر ($K' = 1$) ومستوى معنوية $\alpha = 0,05$. نجد أن هذين القيمتين هما ($d_L = 0,76$) و ($d_u = 1,33$) .

أجزاء تقسيم المجال [4 ; 0] تكون كالتالي :

$0 \quad d_L=0,76 \quad d_u=1,33 \quad 4\text{-}d_u=2,76 \quad 4\text{-}d_L=3,24 \quad 4$

قيمة ($d_{reel} = 1,674$) تقع في الجزء من قيم (d_{tab}) المحصورة بين (d_u) و($4\text{-}d_u$). لذلك لا يوجد داعي لرفض فرضية (H_0) حول عدم الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى بين قيم (ε_t).

نشير في الأخير إلى أن نتائج قياس الارتباط الذاتي لحدود (ε_t) في هذا المثال باستعمال قيم (DW) لا تتمتع بمصداقية كبيرة نظرا لقلة عدد المشاهدات ($n=8$) المستخدمة في تقدير نموذج الانحدار.

مثـــال 8 :

لتكن المعطيات التالية الخاصة بالدخل المتوسط المتاح للفرد والنفقات الفردية على الاستهلاك الشخصي في الولايات المتحدة الأمريكية من سنة 1960 إلى 1991.

السنة	الدخل الفردي المتوسط x_t	الإنفاق الفردي المتوسط y_t		السنة	الدخل الفردي المتوسط x_t	الانفاق الفردي المتوسط y_t
1960	7264	6698		76	11192	10121
61	7382	6740		77	11406	10425
62	7583	6931		78	11851	10744
63	7718	7089		79	12039	10867
64	8140	7384		80	12005	10746
65	8508	7704		81	12156	10770
66	8822	8005		82	12146	10782
67	9114	8163		/83	12349	11179
68	9399	8506		84	13029	11617
69	9606	8737		85	13258	12015
70	9875	8842		86	13552	12336
71	10111	9022		87	13545	12568
72	10414	9425		88	13890	12903
73	11013	9752		89	14040	13027
74	10832	9602		90	14154	13051
75	10906	9711		91	13987	12889

المطلـــوب:

إجراء تقييم لطبيعة العلاقة الارتباطية بين السلسلتين الزمنيتين وتقدير نموذج الانحدار الخطي للعلاقة بين الإنفاق والدخل بالاعتماد على معطيات السلسلتين الزمنيتين المعطاة.

الحـــل:

بعد رسم أزواج قيم السلسلتين الزمنيتين (y_t) و(x_t) بدلالة الزمن نلاحظ أن لكليهما اتجاه عام خطي واضح. نقوم باستعمال طريقة المربعات الصغرى في تقدير نموذج الانحدار الخطي $(\hat{y}_t = a + bx_t)$ بين المتغيرين (y_t) و(x_t)، فنحصل على خصائص نموذج الانحدار المقدر كالتالي:

المعامل الحر لمعادلة الانحدار $(a) = -174,746$

معامل الانحدار $(b) = 0,922212$

معامل التحديد $R^2 = 0,994221$

عدد المشاهدات $n = 32$

عدد درجات الحرية $n - m - 1 = 30$

قيمة مقياس $d_{reel} = 0,521$

معادلة الانحدار المقدرة تأخذ الشكل التالي: $\hat{y}_t = -174,75 + 0,922.x_t$

قيمة معامل الارتباط (r) بين قيم (x_t) وقيم (y_t) تساوي 0,997. هذا يدل على وجود علاقة ارتباطية قوية ومتينة جدا بين الدخل الفردي المتوسط والإنفاق الفردي على الاستهلاك في الولايات المتحدة الأمريكية في الفترة المعطاة. لكن عند تقدير هذا النموذج الانحداري تصادفنا مشكلة أخرى - وجود الارتباط الذاتي بين قيم حدود الخطأ ε_t، لأن القيم الفعلية لمقياس (DW) وهي $(d_{reel}=0,521)$ تشير إلى وجود ارتباط ذاتي موجب بين حدود الخطأ. لذلك فإن معادلة الانحدار المقدرة المحصل عليها أعلاه لا تتمتع بالفعالية وليس لديها

مصداقية إحصائية لأن واحدة من الافتراضات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى لم تحترم عند تقدير المعادلة المذكورة.

من أجل تقدير معادلة انحدار جديدة، تتوفر فيها الفعالية وتحترم في استخدامها كل افتراضات طريقة المربعات الصغرى، نستخدم طريقة تقدير معادلة الانحدار في حالة ما إذا كانت تحتوي على الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى في (ε_t) (بمعنى نحاول التخلص من الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ الموجود في هذا النموذج الانحداري) كالتالي:

* نحسب معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لحدود الخطأ: يمكن حساب هذا المعامل باستعمال العلاقة التي تربط بين معامل الارتباط الذاتي ومقياس (d)، السابق الإشارة إليها: $r_1^{\varepsilon} = \frac{2-d}{2}$

فنحصل على قيمة (r_1^{ε}) المقربة $r_1^{\varepsilon} = \frac{2 - 0,521}{2} = 0,739$. أو نحصل عليه من قيم حدود الخطأ حسب العلاقة:

$$r_1^{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_t).(\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_2)}{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_1)^2 . \sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_2)^2}$$

، فنحصل على قيمة ($r_1^{\varepsilon} = 0,728$). نحسب قيم ($x'_t$) و ($y'_t$) انطلاقا من القيم الأصلية لـ(xt) و(y_t) حسب العلاقات ($y'_t = y_t - r_1^{\varepsilon} . y_{t-1}$)و($x'_t = x_t - r_1^{\varepsilon} . x_{t-1}$).

القيم المحصل عليها نوردها في الجدول أدناه (أنظر الصفحة الموالية).

نقدر معاملات معادلة الانحدار (y'_t) على (x'_t) باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية. فنحصل على معادلة الانحدار التاليـــة: -

$y'_t = 89,427 + 0,934.x'_t + \varepsilon_t$، ثم نستخرج المعامل الحر (a) للمعادلة الأصلية من العلاقة:

$a = a' / (1- r_1^{\varepsilon})$. أي أن: $a = -89,427/(1-0,728) = - 328,776$.

نعبر في النهاية عن معادلة الانحدار للعلاقة بين الدخل الفردي المتوسط (x_t) والإنفاق الاستهلاكي الفردي (y_t) كالتالي:

$y_t = - 328,776 + 0,934.x_t$. هذه المعادلة تتميز بمصداقية إحصائية

y'_t	x'_t	ε_t	y'_t	x'_t	ε_t
2719,51	3018,9	- 171,9	-	-	173,8
3050,14	3251,03	- 25,65	1863	2092,87	106,98
3055,61	3256,78	81	2023,41	2207,95	112,61
3153,26	3545,96	- 10,4	2042,34	2196,6	146,12
3052,98	3409,94	- 51,76	2222,3	2520,3	51,94
2826,87	3239,06	-150,41	2326,5	2581,03	31,57
2945,43	3414,8	- 265,7	2396,22	2627,08	44
2940,05	3294,86	- 244,4	2334,33	2690,45	- 67,3
3328,31	3505,15	- 34,65	2562,3	2762,83	12,88
3477,25	4037,34	- 223,75	2543,54	2762,3	52,98
3556,33	3771,2	- 36,94	2480,34	2880,6	- 90,1
3587,53	3898,47	112,93	2583,88	2920,73	- 127,74
3585,8	3677,4	251,4	2855,8	3051,89	- 4,17
3751,88	4027,5	268,2	2889,4	3430,27	- 229,57
3631,95	3916,3	263,11	2501,3	2813,12	- 212,65

عالية نظرا لأن قيم حدود الخطأ المحصل عليها بواسطة هذه المعادلة لا تحتوي على ارتباط ذاتي وهو يعني الالتزام بإحدى الشروط الأساسية لاستخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير معاملات معادلة الانحدار.

مثـــال 9:

باستعمال معطيات 18 شهرا تم تقدير نموذج الانحدار التالي: $\hat{y}_t = 200 - 1{,}5.x_1 + 4.x_2$ ، الذي يمثل العلاقة بين أرباح مؤسسة ما (y)، ثمن المواد الأولية المستعملة في الإنتاج (x_1) وإنتاجية العمل (x_2). من أجل تحليل حدود الخطأ (ε_t) تم استعمال المعطيات التالية:

الشهر	y_t	x_1	x_2
1	210	800	300
2	720	1000	500
3	300	1500	600
....	....	......	......

$$\Sigma\varepsilon_t^2 = 10500 \;\; , \;\; \Sigma(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2 = 40000$$

المطلوب:

1- أحسب قيم: $\hat{y}_t$، ε_t، ε_{t-1} ، ε_t^2، $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$ باستعمال معطيات الجدول أعلاه.

2 – احسب قيمة مقياس (d) لـ (D-W) .

3– قيم النتيجة المحصل عليها.

4 – هل أن معـــادلة الانحـــدار المقترحة فعالة ويمكن استعمالها في الاستطلاع والتقدير المستقبلي أم لا.

الحـــل:

1- قيم $(\hat{y}_t)$ يمكن استخراجها بتعويض قيم (x_2 , x_1) في معادلة الانحدار:

$$\hat{y}_t = 200 - 1,5\,(800) + 4\,(300) = 200$$
$$\hat{y}_t = 200 - 1,5\,(1000) + 4\,(500) = 700$$
$$\hat{y}_t = 200 - 1,5\,(1500) + 4\,(600) = 350$$

حساب قيم حدود الخطأ ε_t بين القيم التقديرية للنموذج والقيم الفعلية يتم باستعمال العلاقة التالية: $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$، فتكون قيم ε_t كالتالي:

$$\varepsilon_1 = 210 - 200 = 10 \quad , \varepsilon_2 = 720 - 700 = 20$$
$$\varepsilon_3^2 = 2500 \;,\; \varepsilon_1^2 = 100, \varepsilon_2^2 = 400 \quad , \varepsilon_3 = 300 - 350 = - 50$$

بالنسبة لقيم (ε_{t-1}) فهي نفس قيم (ε_t) ولكن بتأخير t بشهر واحد.

نتائج الحساب السابق نوردها في الجدول التالي:

رقم	$\hat{y}_t$	ε_t	ε_{t-1}	$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	ε_t^2
1	200	10	–	–	–	100
2	700	20	10	10	100	400
3	350	- 50	20	- 70	4900	2500
...	....	......	....	...	...	...
Σ					40000	10500

2- حساب مقياس (d) :

$$d_{reel} = \frac{\Sigma\,(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\Sigma\,\varepsilon_t^2} = \frac{40000}{10500} = 3,81$$

3- القيم الفعلية (d_{reel}) نقارنها بالقيم الجدولية (d_{tab}) عند مستوى معنوية $(\alpha = 0,05)$، عدد المشاهدات $n = 18$ وعدد المتغيرات المستقلة في نموذج الانحدار $m = 2$. من الجدول الإحصائي لقيم (d) الحرجة نجد

أن القيمة الدنيا ($d_L = 1,05$) والقيمة العليا ($d_u = 1,53$) . نقسم المجال [4 ، 0] إلى الأجزاء التالية:

$$0 \quad d_L = 1,05 \quad d_u = 1,53 \quad 4 - d_u = 2,47 \quad 4 - d_L = 2,95 \quad 4$$

قيمة (d_{reel}) تقع في الجزء من قيم (d_{tab}) ، المحصورة بين ($4- d_u$) و4.
لذلك نرفض فرضية (h_0) حول عدم الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى بين قيم (ε_t) ونسجل وجود ارتباط ذاتي سالب من المرتبة الأولى بين قيم ε_t المحصل عليها بواسطة نموذج الانحدار المقدر.

4 – بالنظر إلى وجود ارتباط ذاتي بين قيم ε_t ، فإن معادلة الانحدار المقدرة لا تتمتع بمصداقية إحصائية ولا تصلح لاستعمالها في عمليات الاستطلاع والتقدير. وجود الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى بين حدود الخطأ ε_t يرجع إلى عدة أسباب مختلفة. فهذا الارتباط يمكن أن يكون راجعا إلى عدم إبراز عنصر هام من العناصر المؤثرة على أرباح المؤسسة في نموذج الانحدار المقترح. يمكن أن يكون وجود الارتباط راجعا أيضا إلى الخطأ في اختيار نموذج الانحدار أو إلى الخطأ في شكل العلاقة بين عناصره. ربما يكون وجود الارتباط بين ε_t دليلا على أن السلاسل الزمنية (y_t , x_{2t} , x_{1t}) لهم نفس الاتجاه العام.

مثـــال 10:

لتكن المعطيات التالية الخاصة بمبالغ دخل الفرد في الأسرة ونفقاته على شراء السلعة (A) كما يلي:

المؤشر \ السنة	1985	86	87	88	89	90
نفقات شراء السلعة A (y_t)	30	35	39	44	50	53
دخل الفرد في العائلة % من سنة1985 (xt)	100	103	105	109	115	118

المطلـــوب:

1 – حساب الزيادات السنوية المطلقة للدخل والنفقات واستنتاج في ما إذا كان للسلسلتين اتجاه عام أم لا.

2 – عدد أهم الطرق المستعملة في التخلص من الاتجاه العام للسلسلتين الزمنيتين من أجل تقدير نموذج انحدار الطلب على السلعة (A) على دخل الفرد.

3 – تقدير نموذج انحدار الطلب على السلعة المذكورة على دخل الفرد، مستعملا طريقة الفروقات الأولى بين القيم الأصلية للسلسلتين الزمنيتين.

4 – توضيح المعنى الإقتصادي لمعامل الانحدار (b) .

5 – تقدير نموذج انحدار الطلب على الدخل مضيفا إليه عنصر الزمن (t). علق على النتائج.

الحـــل:

1 – نرمز للنفقات على شراء السلعة (A) ب (y_t) ولدخل الفرد في الأسرة ب (x_t). الزيادات السنوية المطلقة في المؤشرين السابقين يمكن الحصول عليها باستعمال العلاقات التالية: $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ ،

$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$. باستعمال هذين العلاقتين نحصل على قيم الزيادات المطلقة السنوية التي تمثل الفروقات الأولى بين القيم المتتالية في كلا السلسلتين الزمنيتين كالتالي:

y_t	Δy_t	x_t	Δx_t
30	-	100	-
35	5	103	3
39	4	105	2
44	5	109	4
50	6	115	6
53	3	118	3

نلاحظ أن قيم (Δyt) تتذبذب حول قيمتها المتوسطة الشئ الذي يعني عدم وجود اتجاه عام واضح لهذه السلسلة. نفس الاستنتاج يمكن أن نسجله بالنسبة لقيم (Δx_t) : هذه القيم تتأرجح حول قيمها المتوسطة وهذا أيضا يعني أن سلسلة قيم Δx_t ليس لها اتجاه عام. هذا بعكس القيم الأصلية للسلسلتين (y_t , x_t) اللتان لهما اتجاه عام خطي.

2- ما دام أن للقيم الأصلية للسلسلتين (y_t , x_t) اتجاه عام فإنه لا يمكن استعمالهما في تقدير نموذج انحدار الطلب على السلعة (A) على الدخل. حتى يمكن استعمال قيم هذين السلسلتين في تقدير النموذج الانحداري يجب التخلص من مكونات الاتجاه العام في كلا السلسلتين. من إحدى الطرق التي يمكن استعمالها في التخلص من مكونات الاتجاه العام في السلسلتين (x_t , y_t) هي طريقة الفروقات الأولى بين القيم، حيث أن لكلا للسلسلتين اتجاه خطي. قيم الفروقات الأولى تم حسابها في الفقرة الأولى من الحل. في هذه الحالة نموذج الانحدار يقدر ليس

باستعمال القيم الأصلية للسلسلتين ولكن باستعمال قيم الفروقات الأولى كالتالي: $\Delta y = f(\Delta x)$.

من أجل التخلص من مكونات الاتجاه العام في السلسلتين الزمنيتين (x_t) و(y_t) يمكن أيضا استعمال طريقة الانحرافات عن الاتجاه العام. تتمثل هذه الطريقة، كما رأينا سابقا، في تقدير معادلة الاتجاه العام لكل سلسلة زمنية على حدة $(\hat{y}_t = a + b.t)$ و $(\hat{x}_t = a + b.t)$. بعد ذلك يتم حساب الفروقات بين القيم التقديرية والقيم الفعلية لكل سلسلة. أي: $dy = y_t - \hat{y}_t$ و $dx = x_t - \hat{x}_t$. ثم يشكل نموذج انحدار الطلب على الدخل باستعمال قيم $(y_t - \hat{y}_t)$ و$(x_t - \hat{x}_t)$ عوض قيم (x_t) و(y_t). بالإضافة إلى هذين الطريقتين، هناك طريقة أخرى تستعمل في تقدير نماذج الانحدار بالاعتماد على معطيات السلاسل الزمنية في حالة ما إذا كانت تحتوي على اتجاه عام. من أجل التخلص من مكونات الاتجاه العام للسلاسل الزمنية، حسب هذه الطريقة، نقوم بإدخال عنصر الزمن t في نموذج الانحدار المراد تقديره. بمعنى آخر نموذج الانحدار يشكل بالاعتماد على القيم الأصلية للسلاسل الزمنية ولكن بشرط إدخال عامل الزمن t في النموذج كمتغير مستقل. يكون شكل نموذج الانحدار المقترح كالتالي: $\hat{y}_t = f(x, t)$.

3 – نموذج انحدار الطلب على الدخل باستعمال الفروقات المتتالية يأخذ الشكل التالي: $\Delta y_t = a + b.\Delta x_t$. من أجل حساب قيم المعاملات (a , b) نستعمل طريقة المربعات الصغرى ونحصل على المعادلتين الطبيعيتين التاليتين:

$$\begin{cases} \Sigma \Delta y = n.a + b.\Sigma \Delta x \\ \Sigma \Delta y.\Delta x = a.\Sigma \Delta x + b.\Sigma \Delta^2 x \end{cases}$$

باستعمال المعطيات الواردة في المثال تأخذ المعادلتين السابقتين الشكل التالي:

$$\begin{cases} 23 = 5.a + 18.b \\ 88 = 18.a + 74.b \end{cases}$$

بحل هذين المعادلتين نحصل على قيم (b , a) التالية: $a = 2,565$ ، $b = 0,565$.

بذلك يأخذ نموذج الانحدار المقدر الشكل التالي:

$\Delta\hat{y}_t = 2,565 + 0,565.\Delta x_t$.

4 – معامل الانحدار $(b = 0,565)$ يعني أنه بزيادة معدل الدخل الفردي ب 1% يزيد معدل الإنفاق على السلعة (A) ب 0,565 وحدة نقدية.

5 – نموذج انحدار الطلب على الدخل إذا ما أدمجنا فيه عنصر الزمن كمتغير مستقل يكون: $\hat{y}_t = a + b.x_t + c.t$.

باستعمال طريقة المربعات الصغرى نحصل على جملة المعادلات الطبيعية التالية:

$$\begin{cases} \Sigma\, y = n\,.a + b.\Sigma\, x + c.\Sigma\, t \\ \Sigma\, y.x = a\,.\Sigma\, x + b.\Sigma\, x^2 + c.\Sigma\,(\,x\,.t\,) \\ \Sigma\,(\,y\,.t\,) = a\,.\Sigma\, t + b.\Sigma\,(\,x\,.t\,) + c.\Sigma\, t^2 \end{cases}$$

نحسب قيم المقادير الواردة في هذه المعادلات باستعمال معطيات المثال ونحصل على الجدول التالي:

t	y	x	y.x	y.t	x.t	x^2	t2
1	30	100	3000	30	100	10000	1
2	35	103	3605	70	206	10609	4
3	39	105	4095	117	315	11025	9
4	44	109	4796	176	436	11881	16
5	50	115	5750	250	575	13225	25
6	53	118	6254	318	708	13924	36
Σ	251	650	27500	961	2340	70664	91

باستخدام قيم هذه المقادير تأخذ المعادلات الطبيعية السابقة الشكل التالي:

$$\begin{cases} 251 = 6\,.a + 650.b + 21.c \\ 27500 = 650\,.a + 70664.b + 2340.c \\ 961 = 21\,.a + 2340.b + 91.c \end{cases}$$

حل جملة هذه المعادلات يسمح بإيجاد قيم (a , b , c) كالتالي:

$a = - 5,42$ ، $b = 0,322$ ، $c = 3,516$.

معادلة الانحدار المقترحة في هذه الحالة تكون:

$\hat{y}_t = - 5,42 + 0,322.x_t + 3,516.t$.

معامل الانحدار $b = 0,322$ يحدد درجة وقوة علاقة y ب x. قيمة هذا المعامل تعني أنه بزيادة دخل الفرد في الأسرة ب 1% يزداد الإنفاق على السلعة A ب 0,322 وحدة نقدية وهذا بشرط بقاء الاتجاه العام للسلسلة الزمنية على حاله بدون تغيير. أما معامل الانحدار $c = 3,516$ فيعكس الزيادة المتوسطة السنوية للإنفاق على استهلاك السلعة Aنتيجة تأثير عوامل أخرى بشرط ثبات تأثير عنصر الدخل.

مثـــــال 11:

بالاعتماد على المعطيات الشهرية حول عدد عقود الزواج (بالألف)

في بلد ما خلال مدة ثلاث سنوات الأخيرة، تم تكوين النموذج الجمعي لهذه السلسلة الزمنية. قيم المعاملات الموسمية المصححة (s_i) (خلال الأشهر معطاة في الجدول التالي:

الأشهر	المعامل الموسمي المصحح (s_i)	الأشهر	المعامل الموسمي المصحح (s_i)
جانفي	- 1	جويلية	3
فيفري	2	أوت	1
مارس	- 0,5	سبتمبر	2,5
أفريل	0,3	أكتوبر	1
ماي	- 2	نوفمبر	- 3
جوان	- 1,1	ديسمبر	?

المعادلـــة التقديرية للاتجاه العام باستعمال معطيـــات ثلاث سنوات (36 شهرا) كانت كالتالي: $\hat{y}_t = 2,5 + 0,03.t$.

المطلوب:

1 – احسب قيمة المعامل الموسمي المصحح لشهر ديسمبر (S_{12}) .

2 – بالاعتماد على المعادلة التقديرية للاتجاه العام أعطي تقديرا للعدد الكلي لعقود الزواج خلال الثلاثي الأول من السنة الرابعة (السنة المقبلة).

الحـــل:

1 – ما دام أن مجموع المعاملات الموسمية خلال دورة واحدة يجب أن يكون مساويا للصفر في النموذج الجمعي، فإن $\sum_{i=1}^{12} s_i = 0$. بناءا على هذا نحدد قيمة المعامل الموسمي لشهر ديسمبر كالتالي:

$$S_{12} = 0 - (- 1 + 2 - 0,5 + 0,3 - 2 - 1,1 + 3 + 1 + 2,5 + 1 - 3) = - 2,2$$

2 – إن القيمة التقديرية لأي حد من حدود سلسلة زمنية، في النموذج الجمعي هي عبارة عن حاصل جمع مكون الاتجاه العام المقدر ($\hat{T}_t$) والمكون الموسمي المناسب (s_t) له. عدد عقود الزواج، المبرمة في الثلاثي الأول من السنة الموالية، هو حاصل جمع عدد عقود الزواج المبرمة في جانفي ($t = 37$)، فيفري($t = 38$) ومارس ($t = 39$) من السنة الموالية.

من أجل حساب مكون الاتجاه العام للقيم المقدرة في هذه الفترة نستعمل معادلة الاتجاه العام المقدرة: $\hat{T} = 2,5 + 0,03.t$.

$$\hat{T}_{37} = 2,5 + 0,03\ .37 = 3,61$$
$$\hat{T}_{38} = 2,5 + 0,03\ .38 = 3,64$$
$$\hat{T}_{39} = 2,5 + 0,03\ .39 = 3,67$$

قيم المعاملات الموسمية للأشهر الثلاثة في السنة المقبلة هي: جانفي ($s_1 = - 1$) ، فيفري ($s_2 = 2$) ومارس ($s_3 = - 0,5$) .

القيم المقدرة لعدد عقود الزواج المبرمة في الثلاث أشهر من السنة القادمة هي:

$$\hat{y}_{37} = \hat{T}_{s1} + s_1 = 3,61 - 1 = 2,61$$
$$\hat{y}_{38} = \hat{T}_{38} + s_2 = 3,64 + 2 = 5,64$$
$$\hat{y}_{39} = \hat{T}_{39} + s_3 = 3,67 - 0,5 = 3,17$$

عدد عقود الزواج المبرمة في الثلاثي ككل تساوي:
$2,61 + 5,64 + 3,17 \cdot (10^3) = 11420$.

مثـــال 12:

حسب معطيات 30 شهرا لإحدى السلاسل الزمنية (x_t) تم الحصول على قيم معاملات الارتباط الذاتي من المراتب المختلفة لقيم هذه السلسلة كالتالي:

r_7	r_6	r_5	r_4	r_3	r_2	r_1	r_i
0,63	0,38	0,72	0,97	0,55	0,4	0,65	القيمة

المطلوب:

1 – حلل خصائص هذه السلسلة مستعملا قيم معاملات الارتباط الذاتي.

2- من أجل تقدير قيم (x_t) المستقبلية يجب تقدير نماذج الانحدار الذاتي الممثلة لهذه السلسلة ثم اختيار أحسنها. علل هذا الاختيار.

الحـــل:

1 – ما دام أن قيم معاملات الارتباط الذاتي كلها مرتفعة، فإن هذا يدل على أن السلسلة تحتوي على اتجاه عام. أكبر قيمة لمعاملات الارتباط هي قيمة معامل الارتباط من المرتبة الرابعة (r_4) هذا يدل على أن السلسلة تحتوي على تقلبات دورية مداها يساوي 4 .

2 – معادلة الانحدار الذاتي الأكثر ملاءمة لهذه السلسلة هي:
$\hat{y}_t = a + b.y_{t-4} + u_t$ وذلك لأن قيمـــة معامل الارتبـــاط الذاتي من المرتبة الرابعة $(r_4 = 0,97)$ تشير إلى وجود علاقة متينة بين حدود

السلسلة بفترة إبطاء مقدارها 4 أشهر. بالإضافة إلى ذلك، يمكن تكوين نموذج انحدار ذاتي متعدد $\hat{y}_t$ بدلالة (y_{t-3}) و (y_{t-4})لأن ($r_3 = 0,72$)، كالتالي: $\hat{y}_t = a + b_1.y_{t-3} + b_2.y_{t-4} + u_t$. من أجل اختيار أحسن هذين المعادلتين يمكن مقارنة معامل التحديد لكليهما.

مثـــال 13:

يعطي الجدول التالي بيانات عن الإنتاج الإجمالي الخام في الولايات المتحدة الأمريكية (% من مستوى سنة 1982)، وقيمة إجمالي الاستثمار الداخلي في الفترة 19959- 1991 (ليار$).

السنة	الاستثمار الداخلي الخـــام (x)	الناتج م.خ. (y)	السنة	الاستثمار الداخلي الخام(x)	الناتج م.خ. (y)
1959	296,4	1931,3	76	520,6	3380,8
60	290,8	1973,2	77	600,4	3533,2
61	289,4	2025,6	78	664,6	3703,5
62	321,2	2129,8	79	669,7	3796,8
63	343,3	2218	80	594,4	3776,3
64	371,8	2343,3	81	631,1	3843,1
65	413	2473,5	82	540,5	3760,3
66	438	2622,3	83	599,5	3906,6
67	418,6	2690,3	84	757,5	4148,5
68	440,1	2801	85	745,9	4279,8
69	461,3	2877	86	735,1	4404,5
70	429,7	2875,8	87	749,3	4540
71	481,5	2965,1	88	773,4	4781,6
72	532,2	3107,1	89	789,2	4836,9
73	591,7	3268,5	90	744,5	4884,9
74	543	3248,1	91	672,6	4848,4
75	437,6	3221,7			

المطلـــوب:

تكوين وتقدير نموذج (Almon) ذو فترة الإبطاء الموزعة ($L = 4$) مع افتراض أن هيكل مدة الإبطاء (L) في شكل متعدد حدود من الدرجة الثانية ($k = 2$) .

الحـــــل:

1 – الشكل العام لنموذج (Almon) ذو فترة الإبطاء ($L = 4$) هو:

$y_t = a + b_0.x_t + b_1.x_{t-1} + b_2.x_{t-2} + b_3.x_{t-3} + b_4.x_{t-4} + \varepsilon_t$.

هيكل معاملات هذا النموذج هو في شكل متعدد حدود من الدرجة 2 ($k = 2$). هذا يعني أن (b_j) يمكن الحصول عليهم من خلال العلاقة: $b_j = c_0 + c_1.j^1 + c_2.j^2$ ، بحيث أن: $j = 0,1,2,3,4$.

2 – من أجل حساب معاملات هذا النموذج يجب تحويل المعطيات الأولية لقيم (x) إلى قيم المتغيرات الجديدة (z_0 , z_1 , z_2) . أي يجب صياغة معادلة الانحدار التالية: $\hat{y}_t = a + c_0.z_0 + c_1.z_1 + c_2.z_2 + \varepsilon_t$، حيث أن :

$$z_{0(1963)} = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + x_{t-4}$$
$$z_{0(1963)} = \mathbf{343,3 + 321,2 + 289,4 + 290,8 + 296,4 = 1541,1}$$
$$z_{1(1963)} = x_{t-1} + 2.x_{t-2} + 3.x_{t-3} + 4.x_{t-4}$$
$$z_{1(1963)} = 321,2 + 2.289,4 + 3.290,8 + 4.296,4 = 2958$$
$$z_{2(1963)} = x_{t-1} + 4.x_{t-2} + 9.x_{t-3} + 16.x_{t-4}$$
$$z_{2(1963)} = \mathbf{321,2 + 4.289 + 9.290,8 + 16.296,4 = 8838,4}$$

وهكذا يمكن الحصول على باقي قيم متغيرات (z_k) كما في الجدول التالي:

السنة	z_0	z_1	z_2
1959	-	-	-
60	-	-	-
61	-	-	-
62	-	-	-
63	1541,1	2958	8838,4
64	1616,5	3017,1	8885,5
65	1738,7	3179,6	9266,2
66	1887,3	3471,3	10129,1
67	1984,7	3752,6	10929
68	2081,5	4020,8	11836,4
69	2171	4243,3	12664,5
70	2187,7	4349,3	12997,1
71	2231,2	4347	12993,4
72	2344,8	4485,2	13393,6
73	2496,4	4629,5	13706,3
74	2578,1	4819,4	13929,2
75	2586	5249	15403,6
76	2625,1	5427,5	16450,1
77	2693,3	5391,6	16625,2
78	2766,2	5126,4	15309,2
79	2892,9	5177,6	14753,2
80	3049,7	5882,5	17061,2
81	3160,2	6329,2	18861
82	3100,3	6478,4	19669,6
83	3035,2	6264,7	19129,7
84	3123	5951,4	17951,8
85	3274,5	612,4	18117,6
86	3378,5	6221,4	17819,4
87	3587,3	6897,4	20128,2
88	3761,2	7487,2	22522,8
89	3792,9	7460,9	22320,9
90	3796,5	7524,3	22388,1
91	3734	7645,3	22855,7

نشير هنا إلى أن عدد المشاهدات التي تم على أساسها حساب المعطيات الجديدة (z_k) هي ($n = 28$) فقط (أربع مشاهدات تم إسقاطها نتيجة تأخير المتغير المستقل (x_t) بأربع فترات زمنية.

3 – حساب المعاملات ($\hat{c}_k$) لمعادلة الانحدار الخطية (z_k) y_t باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية: باستعمال طريقة المربعات الصغرى العادية على معطيات الجدول السابق لقيم (z_k) وقيم (y_t)، نحصل على قيم المعاملات (c_k) كالتالي:

$$\hat{y}_t = 300 + 1,922\,.z_0 - 0,921.z_1 + 0,184.z_2$$

4 – تقدير معاملات (b_j) للنموذج الأصلي: باستخدام معاملات (z_k (المقدرة في المعادلة (z_k) y_t ، أي قيم ($\hat{c}_k$) ، نحسب قيم المعاملات

$(b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , b_4)$ للنموذج الأصلي انطلاقا من العلاقة المحصل عليها سابقا: $b_L= c_0 + L.c_1 + L^2.c_2 +\ldots\ldots+ L^k.c_k$.

$$b_0 = 1,922$$
$$b_1 = c_0 + 1^2.c_1 + 1^2.c_2$$
$$b_1 = 1,922 - 0,921 + 0,184 = 1,185$$
$$b_2 = c_0 + 2^1.c_1 + 2^2.c_2$$
$$b_2 = 1,922 + 2.(- 0,921) + 4.0,184 = 0,814$$
$$b_3 = c_0 + 3^1.c_1 + 3^2.c_2$$
$$b_3 = 1,922 + 3.(- 0,921) + 9.0,184 = 0,811$$
$$b_4 = c_0 + 4^1.c_1 + 4^2.c_2$$
$$b_4 = 1,922 + 4.(- 0,921) + 16.0,184 = 1,176$$

5- تقدير النموذج ذو فترة الإبطاء الأصلي:

بعد حساب المعاملات (b_j) يمكن كتابة الشكل المقدر لهذا النموذج كما يلي:

$$\mathbf{\hat{y}_t = 300 +1,922.x_t + 1,185.x_{t-1} +0,814.x_{t-2} + 0,811.x_{t-3} + 1,176.x_{t-4}}$$

6 - تحليل النموذج :

- باحتساب المضاعف طويل المدى حسب هذا النموذج يتضح أن زيادة الاستثمار في اقتصاد و.م. الأمريكية بمقدار 1 مليار $ في الفترة الجارية يؤدي بعد 4 سنوات على زيادة الناتج المحلي الخام في المتوسط ب5,908 مليار $. أي أن:

$$b_0 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1,922 + 1,185 +$$
$$+ 0,814 + 0,811 + 1,176 = 5,908$$

- بحسب أيضا قيم المعاملات المتوسطة للنموذج (β_j) :

$$\beta_0 = \frac{1,922}{5,908} = 0,325 \; ; \; \beta_1 = \frac{1,185}{5,908} = 0,2 \; ; \; \beta_2 = \frac{0,814}{5,908} = 0,138 \; ;$$

$$\beta_3 = \frac{0,811}{5,908} = 0,137 \; ; \; \beta_4 = \frac{1,176}{5,908} = 0,199$$

هذه النتائج توضح أن أكثر من نصف تأثير المتغير المستقل (حجم الاستثمار x_t) على المتغير التابع (الناتج y_t) تتحقق بفترة إبطاء مقدارها سنة واحدة فقط (0,2 + 0,325)، أي سنة واحدة فقط من بداية الاستثمار. أما 32,5% من هذا التأثير فيتحقق مباشرة في نفس الفترة (الفترة الجارية).

فترة الإبطاء المتوسطة ($\overline{L}$) في هذا النموذج تساوي:

$$\overline{L} = \sum_{j=0}^{L} j \cdot \beta_j = 0,325 . 0 + 0,2 . 1 + 0,138 . 2 +$$
$$+ 0,137 . 3 + 0,199 . 4 = 1,686$$

هذا يعني أن زيادة الاستثمار في اقتصاد و.م. الأمريكية يؤدي في المتوسط إلى زيادة الناتج م.إ. بعد 1,69 سنة.

IV- 3 تمـــارين:

تمـــرين 1:

ديناميكية الناتج المحلي الخام لإحدى الدول تعكسها المعطيات التالية(مليون$):

السنة	1972	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
الناتج	2913	3837	5490	5502	6342	7665	8570	11172	14150	14004	13088	12512
السنة	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
الناتج	13471	13617	16356	20037	21748	23298	26570	23080	23981	23446	29658	39573

المطلوب:

1- تقدير معادلة الاتجاه العام لهذه السلسلة في حالة ما إذا كان في الشكل التالي:

- خط مستقيم – دالة أسية – دالة لوغاريتمية- دالة صماء.

2- اختر من بين هذه المعادلات تلك التي تمثل الاتجاه العام أحسن تمثيل وذلك باستعمال معامل التحديد(R^2)

تمرين 2: تريد إدارة بنك ما دراسة ديناميكية ودائع زبائنها لعدد من السنوات (الودائع بالمليار$). المعطيات الأولية لهذه الودائع معطاة في الجدول التالي:

السنة(t)	1	2	3	4	5	6	7	......	28
الوديعة(x_t)	2	6	7	3	10	12	13	......	53
									Σ

المطلوب:

1- قدر معادلة الاتجاه العام الخطي لهذه السلسلة وأعطي تفسيرا لمعاملاتها.

2- قيم جودة تمثيل هذه المعادلة للسلسلة الزمنية.

3- اعتبرت إدارة البنك أن القيمة المتوسطة السنوية لزيادة ودائع الزبائن تقدر ب مليار دولار. هل أن افتراض البنك يتلاءم مع النتيجة التي توصلت إليها.

تمرين 3:

من أجل دراسة ديناميكية استهلاك اللحم في منطقة ما، تم تجميع المعطيات التالية حول كمية الاستهلاك الفردي المتوسط من اللحم (y_t) خلال سبع سنوات. المعالجة الأولية للمعطيات عن طريق أخذ لوغاريتماتها أعطى النتائج التالية:

الشهر	1	2	3	4	5	6	7
$\ln(y_t)$	2,1	2,11	2,13	2,17	2,22	2,28	2,31

المطلـــوب:

1- كون معادلة الاتجاه العام باستعمال الشكل الأسي لها وأعطي تفسيرا لمعاملاتها.

2- قيم جودة تمثيل هذه المعادلة.

تمرين 4:

لتكن المعطيات التالية الخاصة بمرد ودية الأراضي الفلاحية من الحبوب في مجموعة من المزارع كالتالي:

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8
إنتاجية القنطار	10,2	10,7	11,7	13,1	14,9	17,2	20	23,2

المطلـــوب:

1- اختر معادلة الاتجاه العام الممثلة لتطور هذه السلسلة الزمنية.

2- قدر هذه المعادلة.

3- احسب القيمة التقديرية لإنتاجية القنطار الواحد في السنة التاسعة.

تمـــرين 5:

لتكن المعطيات التالية الخاصة بمستوى البطالة y_t (%) خلال 8 أشهر كالتالي.

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	8,8	8,6	8,4	8,1	7,9	7,6	7,4	7

المطلـــوب:

1- حساب معاملات الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى والثانية لحدود السلسلة الزمنية.

2- علل سبب اختيارك لمعادلة الاتجاه العام الممثل للسلسلة الزمنية واحسب قيم معاملاتها.

3- قيم النتائج المحصل عليها.

تمرين 6:

لتكن السلسلة الزمنية التالية:

8	7	6	5	4	3	2	1	t
10	...	...	...	...	...	...	20	x_t

معلوم أيضا قيم المقادير التالية:

$$\Sigma x_t^2 = 8100 \ , \ \Sigma x_t = 150 \ , ، \ \sum_{t=2}^{n} x_t \, . \, x_{t-1} = 7350$$

المطلـــوب:

1- معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى لقيم هذه السلسلة الزمنية.

2- حدد هل أن السلسلة المدروسة لها اتجاه عام أم لا.

تمـــرين 7:

البيانات الخاصة بقيم الصادرات، الواردات وحجم التبادل التجاري الخارجي للنمسا في الفترة 1962-1996 معطاة في الجدول التالي (بالمليون شيلينغ).

الصادرات	الواردات	حجم ت.التجاري	السنة	الصادرات	الواردات	حجم ت لتجاري	السنة
47	46	93	62	328	332	660	79
51	51	102	63	366	386	752	80
56	56	112	64	405	419	824	81
62	63	125	65	431	412	843	82
67	71	138	66	450	434	884	83
72	74	146	67	498	496	994	84
79	80	159	68	549	547	1096	85
95	91	186	69	523	510	1033	86
117	131	248	70	527	520	1047	87
129	126	255	71	590	584	1174	88
146	144	290	72	669	661	1330	89
166	164	330	73	737	720	1457	90
204	206	410	74	775	758	1533	91
209	205	414	75	792	772	1564	92
236	247	483	76	784	773	1560	93
257	278	535	77	835	842	1677	94
281	280	561	78	887	911	1798	95
				902	920	1822	96

المطلوب:

1- ارسم منحنى انتشار قيم أزواج السلسلة الزمنية المعطاة.

2- قدر معادلة الاتجاه العام لتطور السلسلة الزمنية مستعملا أشكالا مختلفة من الدوال.

3- قيم جودة تمثيل كل معادلة مستعملا معامل الارتباط، معامل التحديد، مقياس فيشر ومقياس ستيودنت.

4- اختر أحسن معادلة تمثل الاتجاه العام للسلسلة الزمنية وأجري تقديرا لقيمة السلسلة في سنة 1998($\hat{y}_{98}$) مستعملا المعادلة المختارة.

5- حدد خطأ التقدير واحسب مجال الثقة للقيمة المقدرة (المجال الذي تنحصر فيه القيمة الفعلية y_{98}).

تمـــرين 8:

الجدول التالي يحتوي على قيمة الصادرات، الواردات والتبادل التجاري الخارجي لبلجيكا في الفترة 1961-1994 (بالمليون فرنك) كالتالي:

السنة	التبادل ت. الخارجي	الواردات	الصادرات		السنة	التبادل ت. الخارجي	الواردات	الصادرات
61	411	209	202		78	3110	1570	1540
62	440	221	219		79	3664	1866	1798
63	487	248	239		80	4151	2125	2026
64	561	283	278		81	4643	2357	2286
65	611	305	306		82	5334	2694	2640
66	665	337	328		83	5788	2864	2924
67	703	351	352		84	6614	3277	3337
68	802	400	402		85	6858	3379	3479
69	957	474	483		86	6554	3187	3367
70	1095	533	562		87	6811	3334	3477
71	1190	581	609		88	7619	3719	3900
72	1316	633	683		89	8818	4320	4498
73	1657	811	846		90	9166	4506	4660
74	2225	1109	1116		91	9504	4658	4846
75	2126	1061	1065		92	9693	4713	4980
76	2527	1261	1266		93	9686	4674	5012
77	2973	1499	1474		94	10599	5108	5491

المطلــوب:

أجب على نفس الأسئلة كما في التمرين 7

تمريــن 9:

لتكن البيانات الواردة في الجدول التالي وهي تمثل قيمة تجارة التجزئة في الثلاثي خلال الفترة 1995-1999 في بلد ما.

رقم الثلاثي	قيمة التبادل التجاري % من السنة السابقة	رقم الثلاثي	قيمة التبادل التجاري % من السنة السابقة	رقم الثلاثي	قيمة التبادل التجاري% من السنة السابقة
1	100	9	104	17	97,6
2	93,9	10	99	18	83,7
3	96,5	11	98,8	19	84,3
4	101,8	12	101,9	20	88,4
5	107,8	13	113,1		
6	96,3	14	98,4		
7	95,7	15	97,3		
8	98,2	16	102,1		

المطلوب:

1- ارسم منحنى القيم الفعلية لهذه السلسلة الزمنية.

2- كون النموذج الجدائي لهذه السلسلة.

3- قيم جودة هذا النموذج مستعملا مؤشر متوسط الأخطاء المطلقة ومتوسط الانحرافات النسبية.

تمرين 10:

لدينا المعطيات التالية الخاصة بقيم الصادرات لدولة ما خلال الفترة 1994-1999 (مليار $).

رقم الثلاثي	قيمة الصادرات	رقم الثلاثي	قيمة الصادرات	رقم الثلاثي	قيمة الصادرات	رقم الثلاثي	قيمة الصادرات
1	4087	7	6311	13	6975	19	6248
2	4737	8	7107	14	6891	20	6041
3	5768	9	5741	15	7527	21	4626
4	6005	10	7087	16	7971	22	6501
5	5639	11	7310	17	5875	23	6284
6	6745	12	8600	18	6140	24	6707

المطلوب:

1- ارسم منحنى هذه السلسلة الزمنية.
2- كون النموذج الجمعي والجدائي لهذه السلسلة الزمنية.
3- قيم جودة كل من هذين النموذجين من خلال مقارنة مجموع مربعات الأخطاء بمجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية للسلسلة عن وسطها الحسابي في الحالتين.

تمـــرين 11:

من أجل إمكانية تقدير قيمة المبيعات لشركة (kbc) تم تكوين النموذج الجمعي للسلسلة الزمنية لقيم المبيعات باستعمال المعطيات الخاصة بالثلاثيات خلال 5 سنوات (1993-1997). معادلة الاتجاه العام للسلسلة المذكورة التي تم الحصول عليها هي: $\hat{T} = 10 + 2.t$ (من أجل الحصول على هذه المعادلة التقديرية تم نمذجة عنصر الزمن باستعمال الأعداد الطبيعية من 1، ....، n). المؤشرات المحصل عليها،

أثناء تكوين النموذج الجمعي السابق، الخاصة بسنة 1996 معطاة في الجدول التالي.

المكون العشوائي	المكون الموسمي	مكون الاتجاه العام	القيمة الفعلية للمبيعات في سنة 1996	فصول السنة
المكونات المحصل عليها بواسطة النموذج الجمعي				
4+	......	....	100	الشتاء
5+	10	....	......	الربيع
....	25	......	150	الصيف
......	......	.....	....	الخريف

المطلوب: تقدير القيم الغير محسوبة في الجدول (القيم مكان النقاط) مع العلم أن قيمة مبيعات شركة (kbc) لسنة 1996 ككل كانت تساوي 490 مليون $

تمـــرين 12:

البيانات التالية تمثل تراخيص بناء السكنات الفردية الجديدة في الولايات المتحدة الأمريكية خلال الفترة 1990-1994 معبر عنها كنسبة مئوية من مستوى سنة 1987.

1994	1993	1992	1991	1990	الشهـــــــر
86,4	78,3	71,2	61,4	72,9	جانفي
87,5	76,4	69,9	51	113,4	فيفري
80,2	74,5	74,3	55,3	86,2	مارس
84,3	68,5	70,2	59,1	80,8	أفريل
86,8	71,6	68,4	59,5	73,7	ماي
86,9	72,1	68,5	64,3	69,2	جوان
85,2	73,3	68,6	62,5	71,9	جويلية
85	76,2	70,6	63,1	69,9	أوت
87,5	79,8	69,7	61,2	69,4	سبتمبر
90	81,2	72,3	63,2	63,3	أكتوبر
88,4	83,5	73,5	64,3	60	نوفمبر
85,7	88	72,5	63,9	61	ديسمبر

المطلوب:

1- احسب قيم مكونات الاتجاه العام والتقلبات الموسمية.

2- كون النموذج الجمعي لهذه السلسلة الزمنية.

3- استخرج دالة ومنحنى الارتباط الذاتي لهذه السلسلة الزمنية، ثم حلل هيكل هذه السلسلة الزمنية.

تمرين 13 :

تمثل البيانات الواردة في الجدول التالي قيم التبادل التجاري الخارجي لدولة ما خلال الفترة (1990- 1994 (مليار $) .

الشهر	1990	1991	1992	1993	1994
جانفي	472,5	477,9	510,9	541	578,2
فيفري	482,1	467,5	484,7	512,3	539,4
مارس	489,5	470,9	486,6	512,6	545,3
أفريل	493,6	469,1	488,4	511,5	551,9
ماي	488	478,1	489,5	511,9	549,7
جوان	490,6	480,6	486,6	513,9	550,1
جويلية	492,5	479,3	491, 8	520	554
أوت	488,1	484,2	495,2	515,9	550
سبتمبر	493,1	484,9	491,8	524,2	565,6
أكتوبر	484,5	485,6	496,1	527,1	564,7
نوفمبر	483	486,1	498,8	529,8	566,9
ديسمبر	476,9	484,7	501,5	534,9	572,7

المطلوب:

1- استخرج قيم مكونات الاتجاه العام والموسمي.

2- كون النموذج الجدائي لهذه السلسلة الزمنية.

3- استخرج دالة ومنحنى الارتباط الذاتي لهذه السلسلة الزمنية. أعطي تحليلا لهيكل هذه السلسلة.

تمـــرين 14:

باستعمال المعطيات الشهرية التالية الخاصة باستهلاك الطاقة الكهربائية في إحدى المدن خلال ثلاث سنوات، تم تكوين النموذج الجمعي للسلسلة الزمنية المعطاة. قيم المعاملات الموسمية المصححة (s_i) خلال الأشهر ممثلة في الجدول التالي.

الأشهر	المعامل الموسمي المصحح(s_i)	الأشهر	المعامل الموسمي المصحح(s_i)	الأشهر	المعامل الموسمي المصحح(s_i)
جانفي	+25	ماي	-32	سبتمبر	+2
فيفري	+10	جوان	-38	أكتوبر	+15
مارس	+6	جويلية	-25	نوفمبر	+27
أفريل	- 4	أوت	-18	ديسمبر	؟

المعادلة التقديرية للاتجاه العام باستعمال معطيات 3 سنوات (36 شهرا) كانت كالتالي:

. $\hat{T} = 2,5 + 0,03.t$

المطلـــوب:

1- حدد قيمة المعامل الموسمي المصحح لشهر ديسمبر(s_{12}).

2- قدر القيمة الكلية للطاقة الكهربائية المستهلكة خلال الثلاثي الأول من السنة الرابعة (السنة الموالية) باستعمال المعادلة التقديرية للاتجاه العام.

تمريـــن 15:

بالاعتماد على المعطيات الخاصة بالثلاثيات حول مستوى البطالة في احدى المدن الساحلية(% من عدد السكان القادرين على العمل) خلال الخمس سنوات الأخيرة تم تكوين النموذج الجدائي للسلسلة الزمنية الخاصة بتطور مستوى البطالة في الفترة المذكورة. قيم المعاملات الموسمية المصححة (s_i) لكل ثلاثي معطاة كالتالي.

الثلاثي	1	2	3	4
S_i	1,4	0,8	0,7	....

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هي كالتالي: $\hat{T} = 9{,}2 - 0{,}3.t$.

المطلوب:

1– احسب قيمة المعامل الموسمي للفصل الرابع(s_4) .

2- بالاعتماد على معادلة الاتجاه العام المقدرة احسب القيمة المقدرة لمستوى البطالة في الثلاثي الأول والثاني للسنة السادسة (السنة القادمة). أي قيم $\hat{y}_{21}$, $\hat{y}_{22}$.

تمرين 16:

تم تجميع معطيات خلال 30 سنة متعلقة بقيمة الصادرات (y_t) (بالمليار دولار) وقيمة الإنتاج الصناعي (x_t) (% من قيمة السنة

السابقة) لدولة ما. في ما يلي نتائج المعالجة الإحصائية الأولية للمعطيات الأصلية للمؤشرين المذكورين.

القيمة المحسوبة لمقياس (d_{reel}) d	قيمة معامل التحديد (R^2)	المعادلة التقديرية
2,31	0,91	معادلة الاتجاه العام ل y_t : $\hat{y}_t = 3,1 + 1,35.t$
2,08	0,89	معادلة الاتجاه العام ل x_t : $\hat{x} = -8,4 + 4,8.t$
2,21	0,95	معادلة الانحدار باستعمال المعطيات الأصلية للسلسلتين : $\hat{y}_t = -10,5 + 0,5.x_t$
2,25	0,86	معادلة الانحدار باستعمال قيم الفروقات الأولى لحدود السلسلتين: $\Delta y_t = 1,4 + 0,03.\Delta x_t$
2,69	0,47	معادلة الانحدار باستعمال قيم الفروقات الثانية لحدود السلسلة: $\Delta^2 y_t = 0,7 + 0,012.\Delta^2 x_t$
0,9	0,97	معادلة الانحدار باستعمال القيم الأصلية للسلسلتين ولكن بإضافة عنصر الزمن t) (في المعادلة: $\hat{y}_t = 4,23 + 0,24.x_t + 0,78.t$

المطلـــوب:

1- احسب قيمة معامل الارتباط الذاتي لحدود الخطأ من المرتبة الأولى وعلق عليها.

2-اختر أحسن معادلة انحدار، التي يمكن استعمالها في تقدير قيم الصادرات في الفترات المستقبلية.

3-بالاستعانة بهذه المعادلة التقديرية احسب قيمة الصادرات المتوقعة في السنة رقم 31 .

تمـــرين 17:

نريد دراسة علاقة قيمة مبيعات البترين (y_t) بتطور أسعار هذه المادة (x_t) وذلك باستعمال المعطيات التالية الخاصة بتطور هذين المؤشرين خلال الست ثلاثيات الأخيرة.

رقم الثلاثي / المؤشر	1	2	3	4	5	6
الرقم القياسي للأسعار (% بالنسبة للثلاثي الأول)	100	104	112	117	121	126
القيمة المتوسطة لمبيعات البترين خلال الثلاثي	89	83	80	77	75	72

المطلوب:

1- قدر نموذج انحدار قيمة المبيعات (y_t) على الرقم القياسي للأسعار x_t بإدخال عنصر الزمن t في النموذج. 2- أعطي تفسيرا لمعاملات نموذج الانحدار الذي تحصلت عليه.

تمرين 18:

يعطي الجدول التالي الإنفاق الاستهلاكي الشخصي والدخل الشخصي المتاح للإنفاق(كليهما بالألف دولار) في إحدى الدول كما يلي.

السنة / المؤشر	1989	90	91	92	93	94	95	96	97
y_t	46	50	54	59	62	67	75	86	100
x_t	53	57	64	70	73	82	95	110	127

المطلوب:

1- تقدير معادلة انحدار y_t على x_t بإضافة عنصر الزمن t إلى النموذج.

2-أعطي تفسيرا للنتائج المحصل عليها.

تمـــرين 19:

المعطيات الواردة في الجدول التالي تمثل مستوى الأرباح (y_t) التي تدفعها شركة ما لمالكي أسهمها (في شكل نسبة مئوية)، والقيمة السنوية المتوسطة لأصولها الثابتة (x_t) (مليار$) خلال 10 سنوات الأخيرة.

السنة / المؤشر	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_t	72	75	77	77	79	80	78	79	80
y_t	4,2	3	2,4	2	1,9	1,7	1,8	1,6	1,7

المطلـــوب:

1- قدر معادلة الانحدار باستعمال الفروقات الأولى (Δxt) و(Δy_t) وأعطي تفسيرا لمعاملات هذه المعادلة.

2-ما هو سبب اللجوء إلى تقدير معادلة الانحدار باستعمال الفرو قات الأولى لحدود السلاسل الزمنية وليس القيم الأصلية لها.

تمـــرين 20:

المعطيات الواردة في الجدول التالي تمثل الإنفاق الشخصي على الاستهلاك (y_t) والدخل الشخصي المتاح للإنفاق (x_t) بالألف دولار.

المؤشر / السنة	85	86	87	88	89	90	91
y_t	300	310	325	340	350	370	385
x_t	335	340	360	378	400	417	430

المطلـــوب:

1-قدر معادلة الانحدار الخطية مستعملا طريقة الفرو قات الأولى.

2-قيم متانة وقوة العلاقة بين السلسلتين الزمنيتين حسب قيمهم الأصلية وحسب قيم الفرو قات الأولى.

تمريــن 21:

من أجل دراسة علاقة مرد ودية الإنتاج y_t (%) في شركة ما بعدد عمالها، تم استعمال المعطيات الخاصة بهذين المؤشرين خلال 30 سنة. بناءا على ذلك تم اقتراح نماذج الانحدار الممثلة للعلاقة السابقة كالتالي:

أ – باستعمال المعطيات الأصلية للسلسلتين الزمنيتين (y_t) و(x_t) :

$d_{reel} = 0{,}8$ ؛ $R^2 = 0{,}9025$ ؛ $y_t = 2 - 0{,}5.x_t + \varepsilon_t$

ب - باستعمال الفرو قات الأولى بين قيم السلسلتين (Δx_t) و(Δy_t) :

$d_{reel} = 1{,}2$ ؛ $R^2 = 0{,}49$ ؛ $\Delta y_t = 3 + 0{,}1.\Delta x_t + \varepsilon_t$

ج – باستعمال الفرو قات الثانية:

$d_{reel} = 2{,}1$ و $R^2 = 0{,}7225$ ؛ $\Delta^2\hat{y}_t = 15 - 0{,}062.\Delta^2 x_t + \varepsilon_t$

د – باستعمال القيم الأصلية لحدود السلسلتين وإدخال عنصر الزمن (t) في النموذج:

$d_{reel} = 2{,}2$ ؛ $R^2 = 0{,}95$ ؛ $\hat{y}_t = - 7 - 0{,}02x_t + 0{,}3.t + \varepsilon_t$

قيم معاملات الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى r_1 بين قيم السلسلتين الزمنيتين معطاة في الجدول التالي:

السلسلة	حسب القيم الأصلية	حسب قيم الفرو قات الأولى لحدود السلسلة	حسب قيم الفرو قات الثانية
x_t	0,99	0,80	0,05
y_t	0,86	0,86	0,1

المطلوب:

1- قيم قوة ومتانة العلاقة الارتباطيه بين قيم السلسلتين الزمنيتين حسب النماذج المختلفة المعطاة.

2-اختبر وجود الارتباط الذاتي بين حدود الخطأ ε_t لنماذج الانحدار المعطاة.

3-اختر أحسن نموذج انحدار وأعطي تفسيرا لمعاملاته.

تمـــرين 22:

لدينا المعطيات التالية الخاصة بإنتاجية العمل في اليوم y_t في إحدى المؤسسات وكمية الطاقة الكهربائية المستهلكة من طرف العامل في اليوم x_t ، كما في الجدول أدناه:

الزمن / المؤشر	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
y_t	28,7	31,7	31,7	32,6	33,9	31,2	33,3	42,6	46	49,9
x_t	3,33	3,39	3,5	3,63	3,81	3,84	3,88	4,07	4,12	4,17

المعادلة التقديرية للاتجاه العام لتطور السلسلتين الزمنيتين x_t , y_t كانتا كالتالي: بالنسبة لسلسلة إنتاجية العمل(y_t) :

$$\hat{y}_t = 33,19 + 1,04.t + 0,09.t^2$$

وسلسلة استهلاك الطاقة الكهربائية (x_t): $\hat{x}_t = 3,774 + 0,049.t$

حيث أن قيم t معطاة كالتالي:

$t = -9 , -7 , -5 , -3 , -1 , 1 , 3 , 5 , 7 , 9$

المطلـــوب:

1- حساب معامل الارتباط بين قيم السلسلتين وذلك باستعمال القيم الأصلية للسلسلتين، الفروقات الأولى لهذه القيم بالنسبة لاستهلاك الكهرباء والفروقات الثانية بالنسبة لإنتاجية العمل وكذلك باستعمال انحرافات القيم الفعلية عن قيم الاتجاه العام.

2- احسب قيم معامل الارتباط الذاتي من المرتبة الأولى بين قيم كل سلسلة حسب كل طريقة.

3-حلل النتائج المحصل عليها واشرح أسباب اختلافها.

تمـــرين 23:

تريد إدارة إحدى المؤسسات التجارية دراسة العلاقة بين حجم المبيعات y_t ووزن النساء العاملات في المؤسسة x_t من العدد الكلي للعمال لديها. من أجل إنجاز هذه الدراسة تم تجميع البيانات الخاصة بالمؤشرين المذكورين خلال التسع سنوات الأخيرة.

إذا علمت أن المعادلات التقديرية للاتجاه العام للسلسلتين الزمنيتين y_t , x_t هي كالتالي:

بالنسبة للسلسلة x_t : $\hat{x}_t = 23,5 + 1,1.t$

والسلسلة y_t : $\hat{y}_t = 374, 14 + 3,33.t + 0,95.t^2$

9	8	7	6	5	4	3	2	1	رقم السنة المؤشر
481	462	444	428	414	403	393	385	378	
34	33	31	29	31	30	27	24	25	

المطلوب:

1- إذا اعتبرنا أن العلاقة بين السلسلتين الزمنيتين X_t , y_t هي خطية، فقدر نموذج انحدار هذه العلاقة واحسب معامل الارتباط بين المؤشرين.

2-احسب معامل الارتباط بين السلسلتين المذكورتين باستعمال قيم الانحرافات عن الاتجاهين العامين للسلسلتين المشار إليهما أعلاه.

3-قارن بين قيمتي معامل الارتباط المحصل عليهما في (1) و (2). أيهما أكثر مصداقية في شرح متانة وقوة العلاقة بين المذكورين.

تمـــرين 24:

لدينا المعطيات التالية حول الصادرات والواردات (بالمليار$) لدولة ألمانيا في الفترة 1985-1996 كما يلي:

الواردات	الصادرات	المؤشر السنة	الواردات	الصادرات	المؤشر السنة
390	403	1991	158	184	1985
402	422	92	191	243	86
346	382	93	228	294	87
385	430	94	280	323	88
464	524	95	270	341	89
456	521	96	346	410	90

المطلوب:

1- ارسم المنحنيين اللذان يمثلان شكل انتشار قيم السلسلتين الزمنيتين (الصادرات والواردات).

2-قدر لكل سلسلة زمنية أشكالا مختلفة لمعادلات الاتجاه العام ثم اختر أحسنها.

3-قدر معادلة انحدار الممثلة للعلاقة بين السلسلتين الزمنيتين ثم قيم طبيعة العلاقة الارتباطيه بينهما(باستعمال القيم الأصلية، الفروقات الأولى بين هذه القيم، قيم الانحرافات عن الاتجاه العام وحسب طريقة إدخال عنصر الزمن t في معادلة الانحدار).

تمـــرين 25:

تريد إدارة إحدى الشركات دراسة العلاقة بين مستوى الأرباح y (%) التي تدفعها هذه الشركة للمساهمين في رأسمالها وقيمة الأرباح التي تحصل عليها من نشاطها x (ألف $). أجريت هذه الدراسة باستعمال معطيات تطور المؤشرين المذكورين خلال 20 سنة. الدراسات الإحصائية الأولية أعطت النتائج التالية:

1- معادلات الاتجاه العام:

أ – إذا كانت معادلات الاتجاه العام لتطور السلسلتين الزمنيتين (y, x) (هي في شكل قطع مكافئ فإنهما تأخذان الشكل التالي:

$$\hat{y}_t = 0,8 + 0,3.t + 0,05.t^2 \quad (R^2 = 0,95)$$
$$\hat{x}_t = 3 - 0,65.t - 0,01.t^2 \quad (R^2 = 0,85)$$

ب – إذا كانت معادلات الاتجاه العام لتطور السلسلتين الزمنيتين (y , x) هي في شكل خطي فتكون كالتالي:

$$\hat{y}_t = 2 + 0,05.t \qquad (R^2 = 0,38)$$
$$\hat{x}_t = 0,65 + 0,8.t \qquad (R^2 = 0,24)$$

2- معامل الارتباط بين السلسلتين:

قيمة معامل الارتباط بين السلسلتين باستعمال:

أ – القيم الأصلية يكون: $r_{xy} = 0{,}98$

ب – قيم الانحرافات عن اتجاه العام إذا كان في شكل قطع مكافئ يكون: $r_{xy} = 0{,}78$

ج – قيم الانحرافات عن الاتجاه العام إذا كان في شكل خطي يكون: $r_{xy} = 0{,}45$

د – قيم الفروقات الأولى: $r_{xy} = 0{,}42$

هـ - قيم الفروقات الثانية: $r_{xy} = 0{,}84$

المطلوب:

1- هل توجد هناك علاقة ارتباطية بين قيم السلسلتين (x , y). في حالة الإيجاب أوضح قيمتها (علل جوابك).

2 – أوضح أسباب اختلاف قيم معامل الارتباط.

تمرين 26:

عند دراسة علاقة حجم الإنتاج المحلي الإجمالي (y_t) بالقيمة الإجمالية للأرباح (x_t) في دولة ما، باستخدام المعطيات المتعلقة بهذين المؤشرين خلال 30 سنة، تم الحصول على النموذج التالي:

$$y_t = -5 + 1{,}5.x_t + 2.x_{t-1} + 4.x_{t-2} + 2{,}5.x_{t-3} + 2.x_{t-4} + \varepsilon_t \, .$$

قيمة معامل التحديد$R^2 = 0{,}9$ ؛ مقياس (d) لقياس الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى لحدود الخطأ$(d_{reel} = 2{,}65)$. القيم الفعلية لمقياس ستيودنت (t_{reel}) لمعاملات النموذج هي:

$$t_{b0} = 2{,}2 \, , \, t_{b1} = 2{,}3 \, , \, t_{b2} = 2{,}5 \, , \, t_{b3} = 2{,}3 \, , \, t_{b4} = 2{,}4$$

المطلوب:

- ما هو نوع هذا النموذج الزمني .

2- أعطي نتائج تحليل الانحدار المحصل عليها.

3- احسب قيم المضاعف قصير وطويل المدى وحدد طبيعة هيكل مدة الإبطاء.

تمـــرين 27:

نفترض أنه باستعمال معطيات خاصة بديناميكية مؤشرات ادخار الأفراد ومداخيلهم في مدينة معينة، تم الحصول على نموذج انحدار ذاتي، يعكس علاقة الادخار السنوي المتوسط للفرد (s_t) بدخله السنوي المتوسط (yt) ومدخراته في السنة السابقة s_{t-1} : $S_t = - 53 + 0,12.y_t + 0,03.s_{t-1}$

المطلوب:

حدد الميل الحدي للادخار قصير وطويل المدى.

تمرين 28:

ليكن النموذج التالي الذي يعكس علاقة الدخل الوطني(D_t) بحجم الاستثمار الإجمالي (I_t) حسب توزيع (Almon) :

$$\mathbf{D_t = 0,048.I_t + 0,099.I_{t-1} + 0,141.I_{t-2} + 0,165.I_{t-3} + 0,167.I_{t-4} + 0,146.I_{t-5} + 0,105.I_{t-6} + 0,053.I_{t-7}}$$

المطلوب:

1- حدد طبيعة هيكل فترة الإبطاء (L) بيانيا.

2- احسب قيمة المعاملات النسبية في هذا النموذج وكذلك مدة الإبطاء المتوسطة ($\overline{L}$).

3-احسب قيمة المضاعفات قصيرة، متوسطة وطويلة المدى وأعطي تفسيرا لهذه القيم.

تمـــرين 29 :

لتكن البيانات الواردة في الجدول أدناه الخاصة بمستوى إنتاجية العمل y (كمية الإنتاج المتوسطة/ الساعة، معبر عنها كنسبة مئوية من مستوى سنة 1982) والأجر المتوسط الساعي للعامل في و.م.الأمريكية في الفترة 1960-1990 .

y	x	السنة	y	x	السنة	y	x	السنة
7,68	100	82	8,21	90,2	71	6,79	65,6	60
7,79	102,2	83	8,53	92,6	72	6,88	68,1	61
7,8	104,6	84	8,55	95	73	7,07	70,4	62
7,77	106,1	85	8,28	93,3	74	7,17	73,3	63
7,81	108,3	86	8,12	95,5	75	7,33	76,5	64
7,73	109,4	87	8,24	98,3	76	7,52	78,6	65
7,69	110,4	88	8,36	99,8	77	7,62	81	66
7,64	109,5	89	8,4	100,4	78	7,72	83	87
7,53	109,7	90	8,17	99,3	79	7,89	85,4	68
			7,78	98,6	80	7,98	85,9	69
			7,69	99,9	81	8,03	87	70

المطلوب:

1- اجري تقديرا لمعاملات نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة، الذي يعكس علاقة إنتاجية العمل x بالأجر الساعي y، في الحالتين التاليتين (مستخدما طريقة المربعات الصغرى):

أ – إذا كان هيكل مدة الإبطاء (L) هو في شكل متوالية هندسية.

ب- في حالة ما إذا كانت (L) في شكل متعدد حدود من الدرجة الثانية.

إذا علمت أن طول مدة الإبطاء L كانت تساوي 2 ، 3 ، 4 .
2 – قيم جودة النموذجين المحصل عليهما باستعمال مقياسي فيشر وستيودنت ثم قارن بين النتائج المحصل عليها واختر أفضل النموذجين.

تمـــرين 30:
لتكن السلسلتين الزمنيتين التاليتين الخاصتين بتطور الكميات المطلوبة من الحم في منطقة معينة والرقم القياسي لتطور أسعار هذه المادة في الفترة 1998-1999.

الكمية المطلوبة من اللحم.% من قيمته في الشهر السابق(y)	الرقم القياسي لسعار اللحم. % من قيمته في الشهر السابق(x)	الشهر (1999)		الكمية المطلوبة من اللحم. % من قيمته في الشهر السابق(y)	الرقم القياسي لأسعار اللحم. % من قيمته في الشهر السابق (x)	الشهر (1988)
74,3	110	1		70,8	101,7	1
92,9	106,4	2		98,7	101,1	2
106	103,2	3		97,9	100,4	3
99,8	103,2	4		99,6	100,1	4
105,2	102,9	5		96,1	100	5
99,7	100,8	6		103,4	100,1	6
99,7	101,6	7		95,5	100	7
107,9	101,5	8		102,9	105,8	8
98,8	101,4	9		77,6	145	9
104,6	101,7	10		102,3	99,8	10
106,4	101,7	11		102,9	102,7	11
122,7	101,2	12		123,1	109,7	12

المطلوب:

1– أوجد قيم معاملات الارتباط الذاتي(من الدرجات المختلفة) بين حدود كل سلسلة زمنية ثم كون دالة الارتباط الذاتي الخاصة بكل

منها. حدد بالاعتماد على هذه الدالة طبيعة هيكل كل سلسلة زمنية (الاتجاه العام والتغير الموسمي).

2- باستعمال نموذجي (Almon) و(Koyck)، احسب قيمة معاملات نموذج الانحدار ذو فترة الإبطاء الموزعة بين(x , y): اعتبر طول فترة الإبطاء لا تتعدى 4؛ هيكل مدة الإبطاء يخضع لمتعدد حدود لا يتجاوز 3 (بالنسبة لنموذج Almon).

3- قيم جودة النموذج المحصل عليه.

4- قارن النتائج المحصل عليها .

تمـــرين 31:

بلغ رقم المبيعات لمؤسسة معينة خلال كل ثلاثي في الفترة 1996-1999 كالتالي:

الثلاثي (t)	رقم المبيعات (y)	الثلاثي (t)	رقم المبيعات (y)	الثلاثي (t)	رقم المبيعات (y)
1	2428	6	3198	11	3916
2	2010	7	3250	12	4142
3	2981	8	3485	13	4441
4	3074	9	3528	14	5583
5	2893	10	3838	15	6230

المطلوب:

1 —كون دالة الارتباط الذاتي بين قيم هذه السلسلة .

2 —حدد طبيعة هيكل هذه السلسلة.

الجداول الإحصائية

جدول – 1 – القيم الحرجة لمقياس– t – لستيودنت

بمستوى معنوية 0,1 ; 0,05 ; 0,01 (من الجانبين)

درجات الحرية	مستوى المعنوية α		
	0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657
2	2,9200	4,3027	9,9248
3	2,3534	3,1825	5,8409
4	2,1318	2,7764	4,6041
5	2,0150	2,5706	4,0321
6	1,9432	2,4469	3,7074
7	1,8946	2,3646	3,4995
8	1,8595	2,3060	3,3554
9	1,8331	2,2622	3,2498
10	1,8125	2,2281	3,1693
11	1,7959	2,2010	3,1058
12	1,7823	2,1788	3,0545
13	1,7709	2,1604	3,0123
14	1,7613	2,1448	2,9768
15	1,7530	2,1315	2,9467
16	1,7459	2,1199	2,9208
17	1,7396	2,1098	2,8982

درجات الحرية	مستوى المعنوية α		
	0,1	0,05	0,01
18	1,7341	2,1009	2,8784
19	1,7291	2,0930	2,8609
20	1,7247	2,0860	2,8453
21	1,7207	2,0796	2,8314
22	1,7171	2,0739	2,8188
23	1,7139	2,0687	2,8073
24	1,7109	2,0639	2,7969
25	1,7081	2,0595	2,7874
26	1,7056	2,0555	2,7787
27	1,7033	2,0518	2,7707
28	1,7011	2,0484	2,7633
29	1,6991	2,0452	2,7564
30	1,6973	2,0423	2,7500
40	1,6839	2,0211	2,7045
60	1,6707	2,0003	2,6603
120	1,6577	1,9799	2,6174
∞	1,6446	1,9600	2,5758

جدول– 2– القيم الحرجة لإحصائية (Durbin-Watson)
dL , dU عند مستوى معنوية 5%
(n : عدد المشاهدات في العينة/ k : عدد المتغيرات المستقلة في النموذج)

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0,70	1,36	0,47	1,90	-	-	-	-	-	-
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29	-	-	-	-
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,29	2,59	-	-
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,37	2,41	0,24	2,82
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93	0,44	2,28	0,32	2,65
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86	0,51	2,18	0,38	2,51
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82	0,57	2,09	0,44	2,39
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78	0,63	2,03	0,51	2,3
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,81	1,75	0,66	1,98	0,56	2,22
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,16
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

جدول-3- القيم الحرجة - F - (توزيع فيشر)

عند مستوى معنوية $\alpha = 0,05$

(v1 : درجات الحرية للبسط / v2: درجات الحرية للمقام)

v_1 / v_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,1	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

جدول -4- القيم الحرجة - χ^2 - توزيع (CHI-DEUX)

v \ p	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6.989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873,	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,346	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

المراجع

1. ALMON S., The distributed lag between capital appropriations and expenditures / Econometrica, vol.33,n°1, jan.1965.
2. BRUNO M., SACHS J., Economics of worldwide stagflation. Harvard University press, Cambridge, Mass, 1985.
3. DAVIDSON R., Estimation and inference in econometrics . M.p.c., N.Y., 1986.
4. DURBIN J., Testing for serial correlation in least-squares regression when some of the regressors are lagged dependant variables. Biometrica, vol.38 . 1970.
5. FARRAR D., GLAUBER R., Multicolinearity in regression analysis. Review of economics and statistics, vol.49, 1967.
6. FOMBY T., HILL R.; Advanced econometric methods. Springer-verlag, Berlin, 1984.
7. GOLDFELD S., Non linear methods in econometrics, N.Holland, Amsterdam, 1972.
8. GOURIEROUX A., Séries temporelles et modèles dynamiques. Economica, Paris. 1990.
9. GREEN W., Econometric analysis. N.Y., 2000.
10. GUJARATI D., Basic econometrics. Mc.Graw-Hill, inc., 1995.
11. HAMILTON J., Time series analysis. Princeton University press: Princeton, N.J., 1994.
12. JOHNSTON A., BUSE R., Econometrics: Basic and applied. M.P.C., N.Y., 1988.
13. JOHNSTON J., Méthodes économétriques : T.,1,2. Economica . Paris . 1985/1988.
14. JUDGE G., HILL R., the theory and practice of econometrics. John Wiley and sons: inc., N.Y., 1985.
15. KLEIN L., An introduction to econometrics. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1962.

16. KATZ D., Econometric theory and applications. Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J., 1985.
17. KOYCK L., Distributed lags and investment analysis. Amsterdam. N.H.P. company. 1954.
18. MALINVAUD E., Méthodes statistiques de l'économétrie. Dunod, Paris, 1985.
19. SCHWARZ G., Estimating the dimension of a model. The annals of statistics, vol.6, 1978.

أنجز طبعه على مطابع

ديوان المطبوعات الجامعية

الساحة المركزية - بن عكنون

الجزائر